第 1 题

英文原题

Helen's vinyl record collection contains 33 LP records and 45 EP records. An LP record plays for three times as long as an EP record. How many more EP records must Helen buy so that the total playing time of her EP records equals the total playing time of her LP records?

(A) 45 (B) 54 (C) 63 (D) 78 (E) 87

中文翻译

Helen 收藏了 33 张 LP 黑胶唱片和 45 张 EP 黑胶唱片. 每张 LP 唱片的播放时长是每张 EP 唱片的 3 倍. Helen 还需要购买多少张 EP 唱片，才能使全部 EP 唱片的总播放时长等于全部 LP 唱片的总播放时长?

(A) 45 (B) 54 (C) 63 (D) 78 (E) 87

解析

以一张 EP 唱片的播放时长为单位，33 张 LP 唱片的总播放时长为 $33 \times 3 = 99$，因此还需购买 $99 - 45 = 54$ 张 EP 唱片.

答案：B.

第 2 题

英文原题

A fruit punch is made by mixing a concentrated syrup with water. The weight of the syrup is 32% of the weight of the water. To the nearest whole number, what percentage of the total weight of the punch is the syrup?

(A) 24% (B) 28% (C) 32% (D) 68% (E) 76%

中文翻译

一种果汁饮料由浓缩糖浆和水混合而成. 糖浆的质量为水的质量的 32%. 糖浆占饮料总质量的百分比，四舍五入到最接近的整数，为多少?

(A) 24% (B) 28% (C) 32% (D) 68% (E) 76%

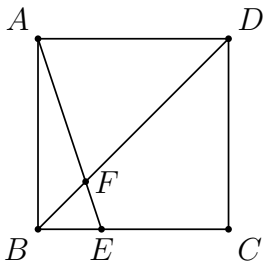
解析

设水的质量为 100，则糖浆的质量为 32，饮料的总质量为 132. 所求为 $\frac{32}{132}\times 100\%\approx 24.24\%$，取整得 24%. **答案：A.**

第 3 题

英文原题

Square $ABCD$ has side length 24. Let E lie on BC with $BE=8$, and let F be the intersection of AE and BD.



What is the area of $\triangle BEF$?

(A) 24 (B) 32 (C) 45 (D) 48 (E) 62

中文翻译

正方形 $ABCD$ 的边长为 24. 点 E 在边 BC 上，且 $BE=8$，点 F 为 AE 与 BD 的交点. 求 $\triangle BEF$ 的面积.

(A) 24 (B) 32 (C) 45 (D) 48 (E) 62

解析

由 $BE\parallel AD$，得 $\triangle BEF\sim\triangle DAF$，相似比为 $BE:AD=1:3$. 因此，点 F 到 BC 与 AD 的距离之比也是 $1:3$，而这两个距离之和为 24. 故点 F 到 BC 的距离为 6，所求面积为 $\frac{1}{2}\times 8\times 6=24$. **答案：A.**

第 4 题

英文原题

Half of the internal angles of a polygon measure 150° each, and the other half of its internal angles measure 200° each. How many sides does the polygon have?

(A) 36 (B) 40 (C) 60 (D) 72 (E) 180

中文翻译

一个多边形有一半的内角各为 150°，另一半的内角各为 200°. 这个多边形有多少条边?

(A) 36 (B) 40 (C) 60 (D) 72 (E) 180

解析

设多边形有 n 条边. 内角的平均值为 $\dfrac{150^\circ + 200^\circ}{2} = 175^\circ$，由内角和公式得 $175n = 180(n-2)$，解得 $n = 72$. **答案：D.**

第 5 题

英文原题

A sequence of real numbers $a_1, a_2, a_3, \ldots$ is defined by $a_1 = 3$, and for all $n \geq 1$, $a_{n+1} = a_n + 2n + 1$. What is the value of a_{10}?

(A) 100 (B) 101 (C) 102 (D) 105 (E) 120

中文翻译

实数列 $a_1, a_2, a_3, \ldots$ 满足 $a_1 = 3$，且对所有 $n \geq 1$，有 $a_{n+1} = a_n + 2n + 1$. 求 a_{10}.

(A) 100 (B) 101 (C) 102 (D) 105 (E) 120

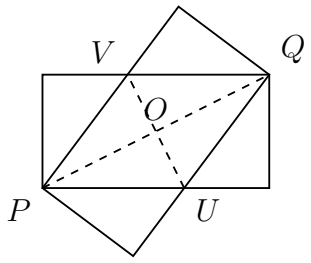
解析

因为 $2n + 1 = (n+1)^2 - n^2$，故 $a_{n+1} - (n+1)^2 = a_n - n^2$. 于是 $a_n - n^2 = a_1 - 1 = 2$，从而 $a_{10} = 10^2 + 2 = 102$. **答案：C.**

第 6 题

英文原题

Two congruent rectangles, each with side lengths 2 and 1, are placed so that they share a diagonal, as shown in the diagram. The area of the octagon formed is m/n, where m and n are relatively prime positive integers. Find $m+n$.



(A) 13 (B) 14 (C) 15 (D) 16 (E) 18

中文翻译

两个全等矩形的边长均为 2 和 1，按图摆放，共用一条对角线．它们组成的八边形面积为 $\frac{m}{n}$，其中 m,n 为互质正整数．求 $m+n$.

(A) 13 (B) 14 (C) 15 (D) 16 (E) 18

解析

记公共对角线为 PQ，两矩形的重叠部分为菱形 $PUQV$，两条对角线交于 O．设矩形长边与 PQ 的夹角为 θ，则 $\tan\theta=\frac{1}{2}$．由对称性，

$$PQ=\sqrt{5},\qquad PO=\frac{\sqrt{5}}{2},\qquad OU=PO\tan\theta=\frac{\sqrt{5}}{4}.$$

故 $UV=\frac{\sqrt{5}}{2}$，重叠菱形的面积为 $\frac{1}{2}PQ\cdot UV=\frac{5}{4}$．八边形为两矩形的并集，面积为 $2+2-\frac{5}{4}=\frac{11}{4}$，于是 $m+n=11+4=15$．**答案：C.**

第 7 题

英文原题

How many ordered triples of positive integers (x, y, z) satisfy both of the following equations?

$$x + y + z = 31$$
$$x + 3y + 3z = 43$$

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

中文翻译

有多少个正整数有序三元组 (x, y, z) 同时满足以下两个方程?

$$\begin{cases} x + y + z = 31, \\ x + 3y + 3z = 43. \end{cases}$$

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

解析

两式相减得 $2(y + z) = 12$，故 $y + z = 6$，$x = 25$. 正整数有序数对 (y, z) 为 $(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)$，共 5 组. **答案：B.**

第 8 题

英文原题

A driver sees an electronic highway sign stating that the next exit is 8 miles away and it will take 5 minutes to reach it. Assume both numbers have been rounded to the nearest integer. Among the following options, what is the lowest speed limit (in miles per hour) that would possibly allow the driver to legally reach the exit within the given time frame?

(A) 65 (B) 70 (C) 75 (D) 80 (E) 85

中文翻译

一位司机看到高速公路电子路牌显示：下一个出口距此 8 英里，预计需要 5 分钟到达. 假设这两个数都已四舍五入到最接近的整数. 在下列选项中，哪一个是可能允许司机在所示时间范围内合法到达出口的最低限速？单位为英里/小时.

(A) 65 (B) 70 (C) 75 (D) 80 (E) 85

解析

设实际距离为 d 英里，时间为 t 分钟，则 $7.5 \le d < 8.5$，$4.5 \le t < 5.5$. 所需平均速度满足

$$v = \frac{60d}{t} > \frac{60 \times 7.5}{5.5} = \frac{900}{11} > 80.$$

所以前四个选项都不可能. 以 85 英里/小时行驶 7.65 英里，恰需 5.4 分钟，路牌显示的两个数分别为 8 和 5. 故最低可选限速为 85 英里/小时. **答案：E.**

第 9 题

英文原题

Two similar but not congruent scalene triangles each have a side with length 9 and a side with length 12. What is the length of the longest side of the larger triangle?

(A) 12 (B) 14 (C) 15 (D) 16 (E) 17

中文翻译

两个相似但不全等的不等边三角形，都有一条边长为 9，另一条边长为 12. 较大三角形的最长边长是多少?

(A) 12 (B) 14 (C) 15 (D) 16 (E) 17

解析

从较小三角形到较大三角形，对应边长都严格增大. 较大三角形含有长为 9 的边，因此较小三角形的最短边小于 9；较小三角形含有长为 12 的边，因此较大三角形的最长边大于 12. 所以两三角形的边长按从小到大排列，分别为 $(s, 9, 12)$ 与 $(9, 12, t)$. 相似比为 $12/9 = 4/3$，从而

$$t = 12 \times \frac{4}{3} = 16.$$

此时两组三边为 $(27/4, 9, 12)$ 与 $(9, 12, 16)$，均满足三角形不等式，且不等边、不全等. **答案：D.**

第 10 题

英文原题

For what odd positive integer n is the mean of $1, 4, 9, 16, \ldots, n^2$ exactly 30% greater than its median?

(A) 19 (B) 39 (C) 49 (D) 89 (E) 169

中文翻译

对于哪个奇正整数 n，数列 $1, 4, 9, 16, \ldots, n^2$ 的平均数恰好比其中位数大 30%?

(A) 19 (B) 39 (C) 49 (D) 89 (E) 169

解析

平均数为 $\dfrac{(n+1)(2n+1)}{6}$，中位数为 $\left(\dfrac{n+1}{2}\right)^2$. 由题意，

$$\frac{(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{13}{10}\left(\frac{n+1}{2}\right)^2.$$

约去 $n+1$ 并整理，得 $20(2n+1) = 39(n+1)$，所以 $n = 19$. **答案：A.**

第 11 题

英文原题

Gary writes down six distinct positive integers: $2, 5, 24, 60, 240$, and a three-digit number n. One of those six numbers is the least common multiple of all six of them. What is the sum of all possible values of n?

(A) 960 (B) 1680 (C) 2160 (D) 2280 (E) 2400

中文翻译

Gary 写下六个互不相同的正整数：$2, 5, 24, 60, 240$，以及一个三位数 n. 这六个数中的某一个数，恰好是全部六个数的最小公倍数. 求 n 所有可能取值之和.

(A) 960 (B) 1680 (C) 2160 (D) 2280 (E) 2400

解析

已知五个数的最小公倍数为 240，所以六个数的最小公倍数不小于 240. 若它也是六个数中的一个，就只能是 240 或 n.

- 若最小公倍数为 240，则 $n \mid 240$，且 $n \neq 240$. 由于 $100 \leq n < 240$，整数 $240/n$ 只能为 2，故 $n = 120$.

- 若最小公倍数为 n，则 $240 \mid n$. 结合三位数及互不相同的条件，得 $n = 480, 720, 960$.

上述四个数均满足题意，所以所求为

$$120 + 480 + 720 + 960 = 2280.$$

答案：D.

第 12 题

英文原题

A drawer has 100 red socks and 100 blue socks. Pippi randomly removes one sock at a time, without replacement, until all the socks of one color have been removed. What is the probability that there are exactly 2 socks left in the drawer once that happens?

(A) $\frac{27}{196}$ (B) $\frac{49}{198}$ (C) $\frac{247}{990}$ (D) $\frac{50}{199}$ (E) $\frac{25}{99}$

中文翻译

抽屉中有 100 只红袜子和 100 只蓝袜子. Pippi 每次随机取出一只袜子，取出后不放回，直到某一种颜色的袜子全部被取出为止. 停止时，抽屉中恰好剩下 2 只袜子的概率是多少?

(A) $\frac{27}{196}$ (B) $\frac{49}{198}$ (C) $\frac{247}{990}$ (D) $\frac{50}{199}$ (E) $\frac{25}{99}$

解析

不妨先设想把 200 只袜子全部随机排列，依次取出. 停止时恰剩两只，等价于这个排列的最后两只颜色相同，而倒数第三只与它们颜色不同.

最后两只为红色、倒数第三只为蓝色的概率，按从后向前观察的顺序计算，为

$$\frac{100}{200} \cdot \frac{99}{199} \cdot \frac{100}{198}.$$

交换两种颜色得到另一种互斥且等概率的情形，因此所求概率为

$$2 \cdot \frac{100}{200} \cdot \frac{99}{199} \cdot \frac{100}{198} = \frac{50}{199}.$$

答案：D.

第 13 题

英文原题

Two bicycle clubs, with disjoint memberships, go on a tour together. On the morning of the tour, members greet each other with a handshake. Everyone shakes hands with everyone else exactly once. There were 114 handshakes between members of the same club and 117 handshakes between members of different clubs. How many more people came from the larger club than from the smaller club?

(A) 0 (B) 4 (C) 6 (D) 7 (E) 8

中文翻译

两个自行车俱乐部一同出游，没有人同时属于两个俱乐部. 出游当天早上，所有人互相握手，每两个人恰好握手一次. 同一俱乐部成员之间共握手 114 次，不同俱乐部成员之间共握手 117 次. 人数较多的俱乐部比人数较少的俱乐部多来了多少人?

(A) 0 (B) 4 (C) 6 (D) 7 (E) 8

解析

设两个俱乐部分别有 a, b 人，且 $a \geq b$. 总握手次数为 $114 + 117 = 231 = \binom{22}{2}$，所以 $a + b = 22$；异会握手次数为 $ab = 117$. 于是

$$(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab = 22^2 - 4 \times 117 = 16,$$

故两会人数相差 4. **答案：B.**

第 14 题

英文原题

Consider a triangle with positive area whose side lengths are functions of t given by $a = t^2 + 1$, $b = 5t + 7$, and $c = 4t + 4$. How many different integer values of t are possible?

(A) 0 (B) 7 (C) 9 (D) 10 (E) infinitely many

中文翻译

一个面积为正的三角形，其三边长是变量 t 的函数:

$$a = t^2 + 1, \qquad b = 5t + 7, \qquad c = 4t + 4.$$

变量 t 有多少个不同的整数取值?

(A) 0 (B) 7 (C) 9 (D) 10 (E) 无穷多个

解析

边长必须为正．由 $c = 4t + 4 > 0$，知整数 $t \geq 0$，此时另外两边也都为正．非退化三角形还须满足三条严格三角不等式.

首先，$a + b > c$ 等价于 $t^2 + t + 4 > 0$，在 $t \geq 0$ 时恒成立．其次，

$$a + c > b \iff t^2 - t - 2 > 0 \iff (t-2)(t+1) > 0,$$

所以 $t > 2$．最后，

$$b + c > a \iff t^2 - 9t - 10 < 0 \iff (t-10)(t+1) < 0,$$

所以 $-1 < t < 10$．合并条件，得 $2 < t < 10$，故

$$t \in \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\},$$

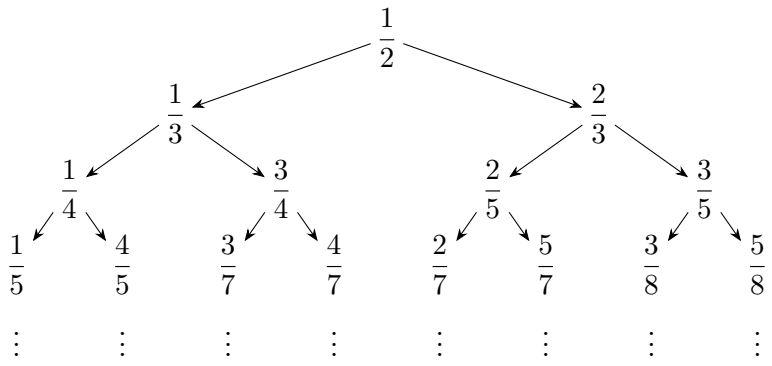
共有 7 个整数取值．端点 $t = 2, 10$ 对应退化三角形，不能计入.

答案：B.

第 15 题

英文原题

The tree diagram below has nodes labeled with rational numbers. The top node, at level 0, is $\frac{1}{2}$. Each node $\frac{a}{b}$ sprouts two nodes in the level below it, $\frac{a}{a+b}$ and $\frac{b}{a+b}$. For example, level 1 has nodes $\frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$ and $\frac{2}{1+2} = \frac{2}{3}$.



At what level does the node $\frac{20}{27}$ appear in the diagram?

(A) 5 (B) 8 (C) 12 (D) 26 (E) The node $\frac{20}{27}$ does not appear in the diagram.

中文翻译

图示树状图的节点标注着有理数. 最上方的节点位于第 0 层，标注为 $\frac{1}{2}$. 每个标注为 $\frac{a}{b}$ 的节点，在下一层产生两个子节点，分别标注为 $\frac{a}{a+b}$ 和 $\frac{b}{a+b}$. 例如，第 1 层的两个节点为 $\frac{1}{3}$ 与 $\frac{2}{3}$. 节点 $\frac{20}{27}$ 出现在第几层?

(A) 5 (B) 8 (C) 12 (D) 26 (E) 该树状图中不出现节点 $\frac{20}{27}$

解析

所有节点都是介于 0 与 1 之间的最简分数: 若 $\gcd(a,b)=1$, 则 $\gcd(a,a+b)=\gcd(b,a+b)=1$.

因 $a<b$，左子节点 $\frac{a}{a+b}<\frac{1}{2}$，右子节点 $\frac{b}{a+b}>\frac{1}{2}$. 故可以唯一反推上一层: 对于最简分数 $\frac{p}{q}$，若 $p<q/2$，父节点为 $\frac{p}{q-p}$; 若 $p>q/2$，父节点为 $\frac{q-p}{p}$.

从目标节点依次往上追溯，得

$$\frac{20}{27}\longrightarrow\frac{7}{20}\longrightarrow\frac{7}{13}\longrightarrow\frac{6}{7}\longrightarrow\frac{1}{6}\longrightarrow\frac{1}{5}\longrightarrow\frac{1}{4}\longrightarrow\frac{1}{3}\longrightarrow\frac{1}{2}.$$

共走过 8 条边，恰好回到第 0 层的根节点，所以目标节点位于第 8 层.

答案: B.

第 16 题

英文原题

A mouse starts in the center cell of a 3×3 grid. Every 6 seconds, it moves to a cell sharing an edge with its current cell, choosing each neighboring cell with equal probability. What is the expected number of seconds it takes for the mouse to first return to the center cell?

(A) 24 (B) 30 (C) 32 (D) 36 (E) 45

中文翻译

一只老鼠从 3×3 方格的中心格出发. 每隔 6 秒，它等概率地移到一个与当前格共边的相邻格. 它首次回到中心格所需秒数的期望是多少?

(A) 24 (B) 30 (C) 32 (D) 36 (E) 45

解析

把非中心格分为边中格和角格. 设从边中格、角格到达中心格所需步数的期望分别为 e, c. 从角格走一步必到边中格，因此 $c = 1 + e$. 从边中格走一步，以 $\frac{1}{3}$ 的概率到达中心格，以 $\frac{2}{3}$ 的概率到达角格，故

$$e = 1 + \frac{2}{3}c = 1 + \frac{2}{3}(1 + e),$$

解得 $e = 5$. 从中心格出发先走一步到边中格，因此首次返回的期望步数为 $1 + 5 = 6$，所求时间为 $6 \times 6 = 36$ 秒. **答案：D.**

第 17 题

英文原题

A triangle with side lengths 18, 42, and 48 is inscribed in a circle, dividing the interior of the circle into four regions. Let A, B, and C be the areas of the three non-triangular regions, where $A < B < C$. Find the value of $A + C$.

(A) $392\pi - 69\sqrt{3}$

(B) $392\pi - 117\sqrt{3}$

(C) $196\pi - 69\sqrt{3}$

(D) $392\pi + 69\sqrt{3}$

(E) $588\pi - 69\sqrt{3}$

中文翻译

一个三边长分别为 $18, 42, 48$ 的三角形内接于圆，把圆的内部划分为四个区域. 三个非三角形区域的面积分别为 A, B, C，且 $A < B < C$. 求 $A + C$.

(A) $392\pi - 69\sqrt{3}$

(B) $392\pi - 117\sqrt{3}$

(C) $196\pi - 69\sqrt{3}$

(D) $392\pi + 69\sqrt{3}$

(E) $588\pi - 69\sqrt{3}$

解析

设长为 42 的边所对的角为 θ. 由余弦定理,

$$\cos\theta = \frac{18^2 + 48^2 - 42^2}{2 \times 18 \times 48} = \frac{1}{2},$$

故 $\theta = 60°$. 圆的半径为 $R = \dfrac{42}{2\sin 60°} = 14\sqrt{3}$, 三角形面积为 $\dfrac{1}{2} \times 18 \times 48 \sin 60° = 216\sqrt{3}$. 三个弓形按对应边长 $18, 42, 48$ 依次增大，因此中间的弓形 B 对应长为 42 的弦，其圆心角为 $120°$. 于是

$$B = \frac{1}{3}\pi R^2 - \frac{1}{2}R^2 \sin 120° = 196\pi - 147\sqrt{3}.$$

从圆面积中减去三角形和弓形 B，得

$$A + C = 588\pi - 216\sqrt{3} - (196\pi - 147\sqrt{3}) = 392\pi - 69\sqrt{3}.$$

答案：A.

第 18 题

英文原题

The strictly decreasing sequence of 11 positive integers $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{10})$ is defined by the recursive rule $a_k = \dfrac{1}{2}a_{k-1} + 6$ for $k \geq 1$. Let N be the minimum possible value of a_0. What is the sum of the digits of N?

(A) 7 (B) 9 (C) 10 (D) 11 (E) 14

中文翻译

严格递减的 11 个正整数组成的数列 $(a_0, a_1, \ldots, a_{10})$ 满足递推关系

$$a_k = \frac{1}{2}a_{k-1} + 6 \qquad (k \geq 1).$$

设 N 为 a_0 的最小可能值，求 N 的各位数字之和.

(A) 7 (B) 9 (C) 10 (D) 11 (E) 14

解析

将递推式写成 $a_{k-1} - 12 = 2(a_k - 12)$. 严格递减说明 $a_{10} > 12$，故最小可取 $a_{10} = 13$. 反推得

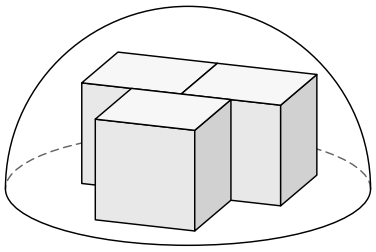
$$N = a_0 = 12 + 2^{10}(13 - 12) = 1036.$$

此时 $a_k = 12 + 2^{10-k}$，确为严格递减的正整数列. 所求数位和为 $1 + 0 + 3 + 6 = 10$. **答案：C.**

第 19 题

英文原题

Three $2\times2\times2$ cubes sit on a table so that two of the cubes share a face, and a face of the third cube is centered along a shared edge of the other two cubes, as shown.



A hemispherical cover is placed over the cubes so that its circumference rests on the table and the cubes are under the cover. What is the least possible value of the radius of the cover?

(A) 3 (B) $\frac{\sqrt{357}}{6}$ (C) $\frac{\sqrt{681}}{8}$ (D) $\frac{\sqrt{178}}{4}$ (E) $2\sqrt{3}$

中文翻译

三个 $2\times2\times2$ 的正方体放在桌面上. 其中两个正方体共用一个面，第三个正方体的一个面的竖直中线与前两个正方体的一条公共棱重合，如图所示. 将一个半球形罩盖在这三个正方体上，使半球的底面圆周落在桌面上，且三个正方体都被罩住. 求半球罩半径的最小可能值.

(A) 3 (B) $\frac{\sqrt{357}}{6}$ (C) $\frac{\sqrt{681}}{8}$ (D) $\frac{\sqrt{178}}{4}$ (E) $2\sqrt{3}$

解析

三个正方体的上表面都离桌面 2. 因此，只需先求这些上表面在桌面上的投影所需的最小覆盖圆半径 r，再用 $R^2=r^2+2^2$ 求半球半径.

投影的四个前后端点组成一个等腰梯形，两底长分别为 $4,2$，高为 4. 取长底的两个端点及短底的一个端点，得到三边为 $4,5,\sqrt{17}$、面积为 8 的锐角三角形. 锐角三角形的最小覆盖圆是其外接圆，故

$$r\geq\frac{4\times5\times\sqrt{17}}{4\times8}=\frac{5\sqrt{17}}{8}.$$

由对称性，该外接圆也经过梯形的第四个顶点. 设圆心到长底、短底的距离分别为 u,v，则 $u+v=4$，且 $u^2+2^2=v^2+1^2$，解得 $u=\frac{13}{8}$，$v=\frac{19}{8}$. 圆心到中间台阶所在直线的

距离为 $\frac{3}{8}$，所以两个台阶角到圆心的距离平方为

$$2^2+\left(\frac{3}{8}\right)^2=\frac{265}{64}<\frac{425}{64}=r^2.$$

投影的全部顶点都在圆内，因而整个投影都被覆盖，下界可以达到．故

$$R=\sqrt{\frac{425}{64}+4}=\frac{\sqrt{681}}{8}.$$

答案：C.

第 20 题

英文原题

Boxes with dimensions $77\times78\times85$ or $2\times3\times85085$ have volume 510,510. How many different boxes with integer side lengths, including these two, have volume 510,510? Boxes are considered different if they have different dimensions.

（A）63 （B）90 （C）301 （D）365 （E）966

中文翻译

长方体的尺寸为 $77\times78\times85$ 或 $2\times3\times85085$ 时，体积均为 510510．各边长均为整数、体积为 510510 的长方体（包括这两种），共有多少种不同的尺寸？交换边长次序不另计．

（A）63 （B）90 （C）301 （D）365 （E）966

解析

分解得 $510510=2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13\cdot17$．先给三条边标号，每个质因数任选一条边，得到 3^7 种分配．

若三条边不全不同，由于体积没有平方因子，相等的两条边只能都是 1．这样的尺寸只有 $1,1,510510$，在有标号时被计入 3 次；其余每种尺寸均被计入 6 次．因此所求为

$$\frac{3^7-3}{6}+1=365.$$

答案：D.

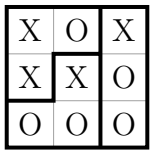
第 21 题

英文原题

Gerry is playing the Triples Game. Her task is to partition the 3×3 grid of squares shown on the left into three sections, each containing three adjoining squares. (Three squares are adjoining if each shares an edge with at least one of the other two.) One point will be awarded for each section containing more X's than O's. Shown on the right is a sample partition that will earn one point in total. A partition that earns two or more points will win the game. What fraction of the possible partitions of this particular grid will result in a win for Gerry?

X	O	X
X	X	O
O	O	O

原方格



得 1 分的示例

(A) $\frac{3}{10}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{2}{5}$ (D) $\frac{4}{9}$ (E) $\frac{1}{2}$

中文翻译

Gerry 正在玩“三格游戏”. 她需要把下列 3×3 方格分成三个区域，每个区域包含三个相邻小格. 这里，三个小格相邻是指每个小格都至少与另外两个中的一个共用一条边. 每个区域中，若 X 的个数多于 O 的个数，就得到 1 分. 图中右侧给出了一种总分为 1 的划分示例. 总分至少为 2 就获胜. 求这个方格的所有可能划分中，使 Gerry 获胜的划分所占的比例.

(A) $\frac{3}{10}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{2}{5}$ (D) $\frac{4}{9}$ (E) $\frac{1}{2}$

解析

将九格依次编号为

$$\begin{array}{ccc}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{array}$$

X 所在位置为 $1,3,4,5$. 用 123 表示由小格 $1,2,3$ 构成的区域，其余类同. 包含小格 1 的连通三格区域只有 $123,124,125,145,147$ 五种. 按它分类，所有划分及得分如下：

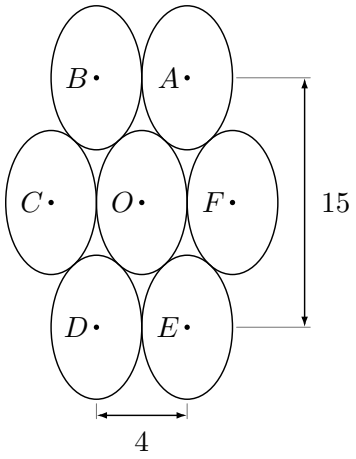
含 1 的区域	完整划分	得分
123	123 / 456 / 789	2
123	123 / 457 / 689	2
123	123 / 478 / 569	1
124	124 / 356 / 789	2
124	124 / 369 / 578	1
125	125 / 369 / 478	1
145	145 / 236 / 789	1
147	147 / 235 / 689	2
147	147 / 236 / 589	1
147	147 / 258 / 369	1

表中穷尽方式为：确定含 1 的区域后，取剩余小格中编号最小者，列出包含它的全部连通三格区域，再检验最后三格是否连通．每种划分恰好出现一次．共有 10 种，其中 4 种获胜，故所求为 $4/10 = 2/5$．**答案：C.**

第 22 题

英文原题

An engineer is designing a closely packed field of 7 wind turbines for electricity production. Each turbine, whose center is marked by a labeled dot in the figure, occupies one of 7 congruent elliptical regions. Turbines in the same row have centers that are 4 units apart, and turbines in the same column have centers that are 15 units apart, as shown in the figure below.



The major axis of each ellipse is $m\sqrt{p}$, where m and p are positive integers and p is not divisible by the square of any prime. What is $m+p$?

(A) 6 (B) 8 (C) 9 (D) 10 (E) 12

中文翻译

七台风力涡轮机分别占据七个全等、紧密相切的椭圆区域，椭圆中心如图标记. 同行相邻中心相距 4，同列上下中心相距 15. 每个椭圆的长轴长为 $m\sqrt{p}$，其中 m,p 为正整数，且 p 不被任何素数的平方整除. 求 $m+p$.

(A) 6 (B) 8 (C) 9 (D) 10 (E) 12

解析

沿竖直方向压缩图形，使各椭圆变成圆. 同行相切的两圆中心相距仍为 4，因此圆的半径为 2. 任意三个两两相切的圆，其中心构成边长为 4 的正三角形，高为 $2\sqrt{3}$.
图中上排与中排原来的距离为 15/2，压缩后变为 $2\sqrt{3}$；长轴也按同一比例压缩为圆的直径 4. 因此原长轴长为

$$4\cdot\frac{15/2}{2\sqrt{3}}=5\sqrt{3}.$$

故 $m+p=5+3=8$. **答案：B.**

第 23 题

英文原题

In a list of one or more consecutive integers, there are p multiples of 2 and q multiples of 3. How many ordered pairs (p,q) are possible for this list if p and q are between 0 and 99, inclusive?

(A) 232 (B) 233 (C) 234 (D) 235 (E) 236

中文翻译

在一个由一个或多个连续整数组成的数列中，有 p 个 2 的倍数和 q 个 3 的倍数. 若 p,q 都在 0 到 99 之间，含端点，则可能的有序数对 (p,q) 共有多少个?

(A) 232 (B) 233 (C) 234 (D) 235 (E) 236

解析

当 $q=0$ 时，数列至多有两项，且 $p=0$ 或 1. 两种情况均可实现，例如单项数列 (1) 与 (2)，故有 2 个数对.

当 $q \geq 1$ 时，数列中的 3 的倍数必依次为 $3j, 3(j+1), \ldots, 3(j+q-1)$. 把从第一个到最后一个 3 的倍数之间的连续整数称为核心区间. 原数列可在核心区间左右各延伸 $0, 1, 2$ 项，不能再多. 每侧可以选择增加 0 或 1 个偶数，故总共可以增加 $0, 1, 2$ 个偶数，且都可实现.

若 $q = 2k$，其中 $k \geq 1$，核心区间含 $6k-2$ 项，恰有 $3k-1$ 个偶数，所以 $p \in \{3k-1, 3k, 3k+1\}$. 若 $q = 2k+1$，其中 $k \geq 0$，核心区间含 $6k+1$ 项；依首项的奇偶性不同，含 $3k$ 或 $3k+1$ 个偶数，因此 $p \in \{3k, 3k+1, 3k+2, 3k+3\}$.

加入 $p, q \leq 99$ 的限制：

- $q = 0$ 时，有 2 种.
- $q = 2, 4, \ldots, 64$ 时，共 32 个 q，每个对应 3 种.
- $q = 1, 3, \ldots, 65$ 时，共 33 个 q，每个对应 4 种.
- $q = 66$ 时，$p = 98, 99$，有 2 种；$q = 67$ 时，只有 $p = 99$，有 1 种.
- $q \geq 68$ 时，偶数至少有 101 个，不符合条件.

因此总数为 $2 + 32 \times 3 + 33 \times 4 + 2 + 1 = 233$. **答案：B.**

第 24 题

英文原题

How many polynomials $f(x)$ of degree 3 satisfying

$$f(2+\sqrt{5}) = f(2-\sqrt{5})$$

are there that have leading coefficient equal to 1 and all of whose coefficients are integers between -10 and 10, inclusive?

(A) 21 (B) 42 (C) 63 (D) 84 (E) 105

中文翻译

有多少个三次多项式 $f(x)$ 满足

$$f(2+\sqrt{5}) = f(2-\sqrt{5}),$$

且最高次项系数为 1，所有系数都是 -10 到 10 之间的整数，含端点?

(A) 21 (B) 42 (C) 63 (D) 84 (E) 105

解析

设 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$，令 $u=2+\sqrt{5}$，$v=2-\sqrt{5}$，则 $u+v=4$，$uv=-1$. 题设等价于

$$0=\frac{f(u)-f(v)}{u-v}=(u+v)^2-uv+a(u+v)+b=17+4a+b.$$

由 $-10\le b=-17-4a\le 10$，得 $-\dfrac{27}{4}\le a\le -\dfrac{7}{4}$，故 $a=-6,-5,-4,-3,-2$，共 5 种，对应的 b 均符合要求. 常数项 c 任取 -10 到 10 的整数，共 21 种，所求为 $5\times 21=105$.

答案：E.

第 25 题

英文原题

Chris the squirrel has 20 rooms in his cavern for storing food. The first room contains 1 nut, the second room contains 2 nuts, the third room contains 3 nuts, and so on, with the 20th room containing 20 nuts. Starting from today, Chris will collect 18 additional nuts each day and store them one per room in 18 distinct rooms in his cavern. His goal is to have all the rooms contain the same number of nuts once he is finished. What is the minimum number of days required to accomplish this goal?

(A) 75 (B) 95 (C) 105 (D) 190 (E) 195

中文翻译

松鼠 Chris 的洞穴里有 20 间储粮室. 第一间有 1 颗坚果，第二间有 2 颗，依此类推，第二十间有 20 颗. 从今天起，Chris 每天收集额外的 18 颗坚果，并选取 18 间不同的储粮室，每间放入 1 颗. 他的目标是在结束时使所有房间中的坚果数量相同. 至少需要多少天?

(A) 75 (B) 95 (C) 105 (D) 190 (E) 195

解析

设经过 d 天，每间房有 t 颗坚果. 由坚果总数关系，

$$20t=210+18d,\qquad t=\frac{105+9d}{10}.$$

第一间房每天至多增加 1 颗，所以 $t\le d+1$，从而

$$\frac{105+9d}{10}\le d+1,\qquad d\ge 95.$$

当 $d=95$ 时，每间应有 96 颗，第 i 间房需要增加 $96-i$ 颗，即恰有 $i-1$ 天不放坚果. 将

房间编号 i 重复 $i-1$ 次，并按编号从小到大排列，得到一张 190 项的清单 $L_1, \ldots, L_{190}$. 第 j 天不向编号为 L_j 与 L_{j+95} 的两间房放坚果，其余 18 间各放一颗，其中 $1 \le j \le 95$. 同一编号连续出现至多 19 次，因此相隔 95 项的两个编号必不相同. 每个编号的每次出现又恰好使用一次，故第 i 间房恰有 $i-1$ 天不放坚果，最终坚果数为

$$i + \big(95 - (i-1)\big) = 96.$$

所以 95 天可以达到目标，最少需要 95 天. **答案：B.**