2026 HMMT November 四轮中文题目

2026-11-11　原文链接

2026 年 HMMT November 于 2026 年 11 月 7 日举行. 本稿收录四轮全部 66 题，保留各轮原题号.

题目 · General（综合轮）

第 1 题 · GEN

下图的 1×8 方格表中，每个格子都填入一个一位正整数，且任意两个相邻格子中的数之差的绝对值为 3 或 5. 求八个数的和.

6	?	8	?	?	7	?	5

第 2 题 · GEN

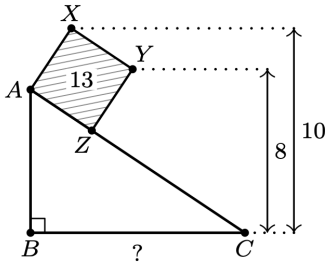
设 m,b 为正实数，直线 $y=mx+b$ 与抛物线 $y=x^2$ 相交于两点，这两点的横坐标相差 4，纵坐标相差 12. 求 b.

第 3 题 · GEN

猴子 Eric 一开始没有香蕉. 每天早晨，Eric 可以选择去超市买一把恰好有 5 根的香蕉，每天至多买一把. Eric 至多只能去超市 3 次. 每天晚上，Eric 必须吃掉 1 根香蕉，否则就会死去. 求 Eric 能够存活 15 个晚上的购香蕉方案数.

第 4 题 · GEN

如图，面积为 13 的正方形 $AXYZ$ 沿直角三角形 ABC 的斜边 AC 放置. 已知 X,Y 到直线 BC 的距离分别为 $10,8$，求 BC.



第 5 题 · GEN

设 α 是使 $\alpha+\sqrt{\dfrac{11}{12}}$ 和 $\alpha^3+\sqrt{\dfrac{11}{12}}$ 都为正有理数的唯一实数. 求 $\alpha^3+\sqrt{\dfrac{11}{12}}$.

第 6 题 · GEN

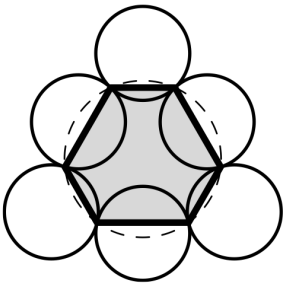
设 O 为锐角三角形 ABC 的外心，D,E 为边 BC 上的点，满足 $OD\parallel AB$、$OE\parallel AC$. 已知 $BD=7, DE=6, EC=5$，求 AO.

第 7 题 · GEN

一个 11×11 的单位正方形方格表，其行、列依次编号为 1 至 11. 删去行号和列号均为偶数的所有格子. 求将剩余图形分割为边长都是整数的矩形的方案数.

第 8 题 · GEN

如图，六个半径为 3 的圆按图示方式排列，每个圆都与另两个圆相切. 这些切点构成一个圆内接六边形的六个顶点，其外接圆半径为 5. 求这个六边形的面积.



第 9 题 · GEN

设 $a_1, a_2, \ldots$ 为正整数数列，满足 $a_1=a_2=\cdots=a_7=1$，且

$$a_n = a_{n-1}+10a_{n-7} \qquad (n\geq 8).$$

求 a_{2026} 除以 10000 的余数.

第 10 题 · GEN

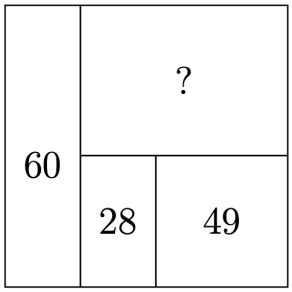
HMMTland 国有 100 座城市. 工程师计划在每一对城市之间修建一条隧道，并将互不相同的建设费用 $1,2,\ldots,\binom{100}{2}$ 随机分配给这些拟建隧道，每一种分配等可能. 每座城市只资助与它相连的、费用最低的那条隧道. 一条隧道只要获得至少一座城市的资助就会建成；若获得不止一座城市资助，也只修建一次. 求最终隧道系统的连通分量数的期望.

（连通分量是城市的一个极大非空集合，其中任意一座城市都能沿已建隧道到达集合中的任意另一座城市.）

题目 · Theme（主题轮）

第 1 题 · THM

Moana 把四块长方形木板绑在一起，搭成一个正方形木筏. 所有木板的边长都是整数，其中三块的面积分别为 $60, 28, 49$，位置如图. 求第四块木板的面积.

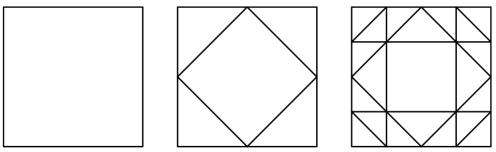


第 2 题 · THM

Ariel 正在整理她收集的人类宝物. 她的 dinglehopper 可以恰好分成每组 102 件，snarfblatt 可以恰好分成每组 103 件. 将这两类宝物合在一起，又可以恰好分成每组 100 件. 求 Ariel 收藏的这两类宝物的非零总件数的最小可能值.

第 3 题 · THM

Jasmine 正在为飞毯设计新图案. 她的第一稿是一个正方形. 要画第 $n+1$ 稿，她从第 n 稿出发，对图中由线段围成的每一个多边形区域，将其各对相邻边的中点用线段连接. 前三稿如图，分别包含 $1, 5, 21$ 个多边形区域. 求第 6 稿中的多边形区域数.



第 4 题 · THM

经历最近的一些事情后，Snow White 决定重新开始吃苹果. 她在第 1 天吃 1 个苹果. 对每个正整数 $n \geq 2$，她在第 n 天吃的苹果数，是此前所有天吃的苹果总数的 n 倍. 求她在第 2026 天吃的苹果数.

第 5 题 · THM

Rapunzel 的头发又长得太长，于是她决定在接下来的 6 天里每天剪发．第一天开始时，她的头发长 2026 英尺．她先选定一个正整数 m．然后在第 n 天，先剪去 $\frac{m}{n}$ 英尺，再剪去剩余头发长度的 $\frac{1}{n+1}$．假设头发不会重新长出，且这 6 天每天结束时，头发长度都是整数英尺．求 m 的最小可能值.

第 6 题 · THM

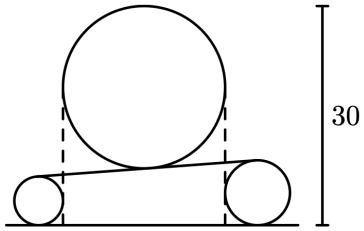
Raya 骑着龙 Sisu 在 Kumandra 上空飞行时，发现一座想要前往的小圆岛．起初，她们位于点 $(0,0)$ 的正上方．岛屿由所有满足 $(x-4)^2+(y-6)^2 \le 1$ 的点 (x,y) 组成．无风时，Sisu 可以沿任意方向以每小时 2 个单位长度的速度飞行．此外，风沿 x 轴正方向以每小时 1 个单位长度的恒定速度推动 Sisu．求她们到达岛屿任一点正上方所需的最短时间，以小时为单位．（假设整个飞行过程中高度不变.）

第 7 题 · THM

Mulan 命令 10 名士兵站成一排．每名士兵独立地、等可能地指向自己相邻士兵中的一人．求恰有 3 对相邻士兵互相指向对方的概率.

第 8 题 · THM

Cinderella 的南瓜马车由两个圆形车轮和一个圆形南瓜组成，三者都与同一条线段相切．马车停在平地上时，南瓜的最左点位于左轮最右点的正上方，南瓜的最右点位于右轮最左点的正上方．两轮半径分别为 $3,4$，且整辆马车的高度为 30．求南瓜的半径.



第 9 题 · THM

求满足 $be\ell+\ell+e=6886$ 和 $be+\ell+\ell e=586$ 的唯一正整数三元组 (b,e,ℓ).

第 10 题 · THM

Merida 在城堡墙上画了一个边长为 4 个单位长度的等边三角形 ABC，并尝试向三个顶点各射一箭．然而三箭分别落在 D,E,F，且它们到 A,B,C 的距离分别为 $1,2,3$ 个单位长度．此外，三角形 DEF 与三角形 ABC 的重心重合．求三角形 DEF 面积的最大可能值.

题目 · Team（团队轮）

第 1 题 · TEAM（20 分）

Jerry 和 Sophie 各自得到一个数. 两人都被告知以下信息：

- 他们的数是 2 到 50 之间（含端点）的两个不同整数.
- Jerry 的数是 Sophie 的数的某个整数次幂.

然而，仅根据这些信息，两人都无法确定对方的数. 求这两个数之和.

第 2 题 · TEAM（25 分）

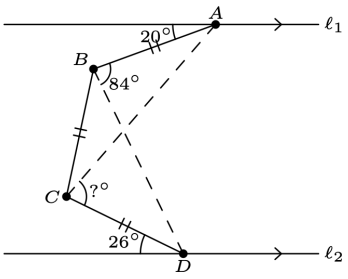
当 m, n 遍历所有正整数时，求表达式

$$(\sqrt{21}+\sqrt{55})^2+(\sqrt{m}-\sqrt{n})^2$$

所能取到的最小整数值.

第 3 题 · TEAM（30 分）

点 A, D 分别在两条平行直线 ℓ_1, ℓ_2 上. 点 B, C 位于两平行线之间，满足 $AB = BC = CD$，且 B, C 位于直线 AD 的同一侧. 已知 AB 与 ℓ_1 的夹角为 20°，CD 与 ℓ_2 的夹角为 26°，且 $\angle ABD = 84^\circ$. 求 $\angle ACD$ 的度数.



第 4 题 · TEAM（35 分）

正整数数列 $F_0, F_1, F_2, \ldots$ 满足 $F_0 = F_1 = \cdots = F_{2025} = 1$，且对所有整数 $i \geq 2026$，有

$$F_i = F_{i-2025} + F_{i-2026}.$$

求小于 2026、且能表示为某个 F_k（其中 k 为正整数）的正整数 n 的个数.

第 5 题 · TEAM（40 分）

一个正圆锥的顶点为 A，底面半径为 1，高为 7. 两个互相垂直的平面分别沿线段 AP, AQ 与圆锥侧面相切，其中 P, Q 位于圆锥的底面圆周上. 求 PQ.

第 6 题 · TEAM（45 分）

已知 a, b 均为大于 1 的整数，且 $\dfrac{a+b^2}{a^2}$ 是整数. 求 b 的最小可能值.

第 7 题 · TEAM（45 分）

Alice 有 8 个球和 8 个盒子，球与盒子都分别编号为 $1, 2, 3, \ldots, 8$. 她要在每个盒子中恰好放一个球，并且恰有一个球的编号严格大于所在盒子的编号. 求满足条件的放法数.

第 8 题 · TEAM（50 分）

在三角形 ABC 中，$AB = 13, BC = 14, CA = 15$. 在线段 BC 上选取点 D. 点 P, Q 满足 $\angle PBC = 90^\circ$、$\angle QCB = 90^\circ$，且四边形 $APDQ$ 是以 PQ 为对称轴的箏形. 选取 D 使 $\angle PAQ$ 最大，求此时的 AD.

第 9 题 · TEAM（50 分）

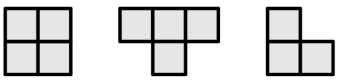
实数 x, y, z 满足

$$\begin{cases} x + y - \sqrt{z^2+1} = -5, \\ y + z - \sqrt{x^2+1} = 0, \\ z + x - \sqrt{y^2+1} = 5 \end{cases}$$

求 $x + y + z$.

第 10 题 · TEAM（55 分）

用图示的 O 型四格骨牌、T 型四格骨牌和 L 型三格骨牌铺满一个 2×199 的方格板，设铺法数为 N. 求 N 除以 128 的余数.（骨牌可以旋转；只要两种铺法在旋转或反射后才相同，就仍视为不同铺法.）



题目 · Guts（团队限时轮）

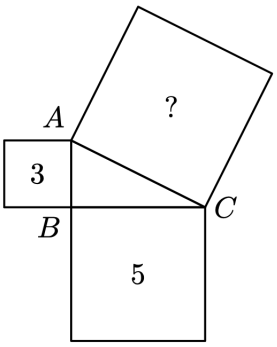
第 1 题 · GUTS（5 分）

在下图的 1×9 方格中，每格填一个非负的一位整数，使任意相邻两格内的数之积都能被 6 整除. 求九个数之和的最小值.

?	6	1	?	0	2	?	?	3

第 2 题 · GUTS（5 分）

如图，分别以直角三角形 ABC 的三条边为边向外作正方形. 以直角边 AB、BC 为边的正方形的周长分别为 3、5. 求以斜边 AC 为边的正方形的周长.



第 3 题 · GUTS（5 分）

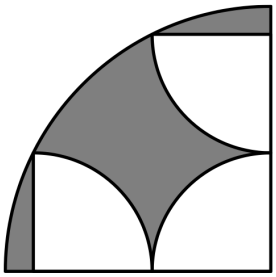
求由三个字母 A、三个字母 B 和三个字母 C 组成的九字母字符串的个数，要求每个 A 都与另一个 A 直接相邻，每个 B 都与另一个 B 直接相邻，每个 C 都与另一个 C 直接相邻.

第 4 题 · GUTS（6 分）

求最大的两位正整数 $\overline{ab}$，使 $\overline{ab}+\overline{ba}$ 为完全平方数.

第 5 题 · GUTS（6 分）

如图，三个半径为 1 的四分之一圆置于一个较大的四分之一圆内. 求阴影部分的面积.



第 6 题 · GUTS（6 分）

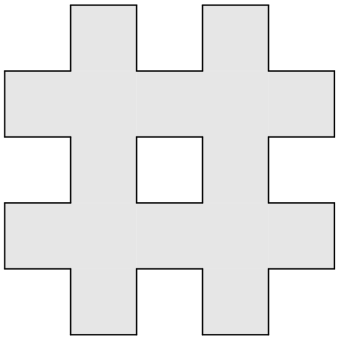
白雪公主与七个小矮人围坐一圈，面向圆心．最初白雪公主持有一个装着 100 个苹果的篮子，其中 1 个有毒，其余无毒．每分钟，持篮者从篮中剩余的苹果中等可能地随机选取一个吃掉，再将篮子递给左边的人．各次选择独立进行，这个过程在有人吃到毒苹果时停止．求白雪公主没有吃到毒苹果的概率.

第 7 题 · GUTS（7 分）

实系数二次多项式 $P(x)$ 满足 $P(10)-P(1)-P(9)=62$ 及 $P(10)-P(2)-P(8)=118$．求 $P(10)-P(3)-P(7)$.

第 8 题 · GUTS（7 分）

Jason 将一个 5×5 正方形分成 25 个单位正方形，并去掉其中 9 个，得到下图的 “井” 字形区域．他在该区域内画一条线段，允许线段接触区域边界．求这条线段可能的最大长度.

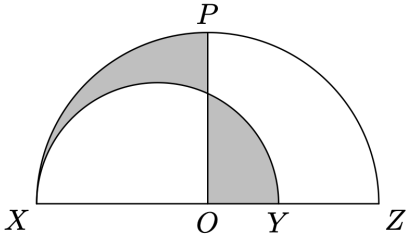


第 9 题 · GUTS（7 分）

Hannah 有 16 支颜色各不相同的彩色铅笔，它们构成 8 对互补色．她随机给一面由三条水平色带构成的旗帜涂色，要求三条色带颜色两两不同．求任意相邻两条色带都不是互补色的概率.

第 10 题 · GUTS（8 分）

如图，以 XY 为直径的小半圆位于以 XZ 为直径的大半圆内，半径 OP 将大半圆分成两个全等的四分之一圆．两块阴影区域的面积相等．已知 $XZ=10$，求 XY.



第 11 题 · GUTS（8 分）

Mark 将一枚公平的六面骰子掷 6 次，按顺序记录点数，组成一个六位数. 求这个数是 15 的倍数的概率.

第 12 题 · GUTS（8 分）

求最小的正整数 $n \geq 5$，使下列五个整除关系同时成立：

$$\binom{n}{0} \mid \binom{n}{1}, \quad \binom{n}{1} \mid \binom{n}{2}, \quad \binom{n}{2} \mid \binom{n}{3}, \quad \binom{n}{3} \mid \binom{n}{4}, \quad \binom{n}{4} \mid \binom{n}{5}.$$

第 13 题 · GUTS（9 分）

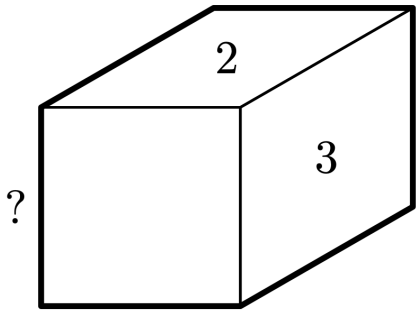
一条环形项链由 20 颗红珠和 30 颗绿珠串成. Stella 将其切成珠数相等的两半，并取走其中一半. 已知对所有切法而言，她所取的一半中红珠数的最小值为 6，绿珠数的最小值为 N. 在所有满足条件的珠子排列中，求 N 的最大可能值.

第 14 题 · GUTS（9 分）

实数 a_1, a_2, a_3, a_4 成等比数列，且 $a_2 + a_3 = 20$、$a_1 + a_4 = 26$. 求 $\sqrt[3]{a_1} + \sqrt[3]{a_4}$.

第 15 题 · GUTS（9 分）

如图，一个等边六边形被分成一个正方形和两个菱形. 已知两个菱形的面积分别为 2 和 3，求这个六边形的边长.



第 16 题 · GUTS（10 分）

设 N 是满足下列条件的最小正整数：$2026 \mid N$，且对 N 的任意正因数 k，k 的正因数个数也是 N 的因数. 求 $\dfrac{N}{2026}$.

第 17 题 · GUTS（10 分）

星期一，Steve 在黑板上写下一个非零的一位数，且它是 4 的倍数. 之后每天，他都在当前数的任意位置插入一个非零数字，可以插在最前面、中间或最后面，并要求新数仍是 4 的倍数. 求星期四黑板上可能出现的四位数的个数.

第 18 题 · GUTS（10 分）

点 D 在线段 BC 上，ABC 为三角形，且 $AB = BD = 14$、$DC = 9$. 点 T 在直线 AD 上，满足 $\angle BCT = 90^\circ$，且 D 位于 A, T 之间. 求 AT 的最小可能值.

第 19 题 · GUTS（11 分）

四个正的最简分数 $\frac{a_1}{a_2}$、$\frac{b_1}{b_2}$、$\frac{c_1}{c_2}$、$\frac{d_1}{d_2}$ 满足

$$\frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{b_1}{b_2} \cdot \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2}.$$

已知 $a_1a_2 = 720$、$b_1b_2 = 108$、$c_1c_2 = 250$，求 d_1d_2 的最小可能值.

第 20 题 · GUTS（11 分）

在三角形 ABC 中，$BC = 8$. 圆 ω 以 A 为圆心，并经过边 BC 的中点. 已知过 B、C 分别可以作圆 ω 的两条互相平行的切线，且点 A 到直线 BC 的距离为 3. 求圆 ω 的半径.

第 21 题 · GUTS（11 分）

求由字母 A, B 组成的长度为 10 的字符串的个数，要求其形如 ABB 的连续子串个数与形如 BBA 的连续子串个数相等.

第 22 题 · GUTS（12 分）

求整数

$$\left\lfloor 10^{99} \cdot \frac{100008}{700007} \right\rfloor$$

的十进制各位数字之和. 其中 $\lfloor x \rfloor$ 表示不超过 x 的最大整数.

第 23 题 · GUTS（12 分）

若由互不相同的正整数组成的集合 S 满足：对任意有序三元组 $(a, b, c) \in S^3$（三个元素可以相同），都有 $a \mid bc$，则称 S 为“整除丰富集”. 求最小的正整数 n，使某个恰有 25 个元素的整除丰富集包含 n.

第 24 题 · GUTS（12 分）

Gregasaurus 有一张边长为 1 的正方形纸，其中一个顶点标有红点. 一次折叠包含以下步骤：

1. 选一条经过正方形内部的直线 ℓ，将正方形分成两部分.
2. 任选其中一部分，将其关于 ℓ 反射.

他恰好折叠一次. 求最小区域 R 的面积，使无论怎样折叠，红点都一定落在 R 中.

第 25 题 · GUTS（13 分）

设 $p(x)$ 是次数不超过 6 的多项式，且对于所有 $n \in \{2,3,4,5,6,7,8\}$，有 $p(n) = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$. 求 $p(0)$.

第 26 题 · GUTS（13 分）

Sophia 从一个 5×5 的点阵中等概率地选出 10 个点. 已知每行、每列恰有 2 个点被选中，求所选点中有 4 个构成边与点阵行列平行的矩形的概率.

第 27 题 · GUTS（13 分）

Crystal 在日记里写下两个五位正整数，十个数字 $0,1,\ldots,9$ 各使用一次，且不允许有前导零. 求这两个数之差的绝对值的各位数字之和的最大值.

第 28 题 · GUTS（15 分）

一百名玩家 $P_1, P_2, \ldots, P_{100}$ 玩一个游戏. 玩家 P_i 的硬币正面朝上的概率为 p_i. 第 n 轮由玩家 P_n 抛自己的硬币，其中下标按模 100 循环. 若正面朝上，游戏立刻结束，该玩家获胜；否则轮到下一名玩家. 已知每名玩家获胜的概率都是 $\frac{1}{100}$，且 $p_{100} = \frac{6}{7}$，求 p_1.

第 29 题 · GUTS（15 分）

凸五边形 $BRYAN$ 的面积为 128，且 $\angle A + \angle B = 180^\circ$，边长满足 $BR = 2$、$RY = 12$、$YA = 10$、$AN = 11$、$NB = 11$. 求 $\sin\angle A$.

第 30 题 · GUTS（15 分）

存在一个实系数二元多项式 $p(x,y)$，其总次数不超过 4，且 $p(m,n)$ 为下表第 m 行、第 n 列的数. 这里行从下往上编号，列从左往右编号.

4	8	$*$	?
3	5	9	$*$
2	3	5	9
0	1	2	2

求 $p(4,4)$，即表格右上角的数.

第 31 题 · GUTS（17 分）

设 $ABCD$ 为圆内接四边形，射线 BA、CD 相交于 E，射线 CB、DA 相交于 F. 三角形 EDA、EBC、FAB、FCD 的内切圆半径依次为 $5, 10, 6, 10$. 求四边形 $ABCD$ 的面积.

第 32 题 · GUTS（17 分）

Mark 有一个质量为 1 克的放射性小球. 在第 n 分钟，每个放射性小球都有 $\dfrac{1}{2}$ 的概率分裂成两个放射性小球，每个新球的质量都是 2^{-n} 克，不论原球的质量以及原球何时产生. 求 7 分钟后所有小球总质量的期望，单位为克.

第 33 题 · GUTS（17 分）

$\dfrac{1}{179}$ 的十进制展开的循环节长度为 178. 求这个循环节内各位数字的平方和.

第 34 题 · GUTS（20 分）

Krad 从数 1 开始. 每一步，若当前数为 n，就从 $6n$ 的所有正因数中等概率选一个，替换当前数. 设 2026 步后当前数为 48 的概率是 p，估计 $\dfrac{1}{p}$.

请提交一个实数 E. 若正确答案为 A，得分为 $\left\lfloor 20.99e^{-0.02(E-A)^4} \right\rfloor$.

第 35 题 · GUTS（20 分）

Sam 有一块标准的 6×6 黑白相间棋盘. 随后，他以 $\dfrac{1}{2}$ 的概率将每个白格涂黑，各白格是否涂黑相互独立. 估计此时棋盘上黑色连通区域个数的期望.

请提交一个实数 E. 若正确答案为 A，得分为 $\left\lfloor 20.99e^{-12(E-A)^2} \right\rfloor$.

一个黑色连通区域是满足下述性质的极大黑格集合：集合中任意两个黑格之间，都有一条只经过该集合内黑格的路径，且路径上相邻两格共享一条边.

第 36 题 · GUTS（20 分）

求满足以下两个条件的正整数 $N < 10^9$ 的个数：

- N 不是 2 或 5 的倍数；
- 不存在与 N 位数相同、且至多在一个十进制数位上与 N 不同的素数 M.

请提交一个正整数 E. 若正确答案为 A，得分为 $\operatorname{round}\left(20 \min\left(\dfrac{A}{E}, \dfrac{E}{A}\right)^2\right)$.