第 78 届波兰数学奥林匹克第一阶段测试题（题目版）

2026-11-10　原文链接

第 78 届波兰数学奥林匹克（2026/2027 学年）的第一阶段采用了新赛制. 此前的第一阶段是持续约三个月的通讯赛，共三组、每组四题；本届改为两次现场考试：10 月 15 日在各校进行 75 分钟的测试，共 12 题，每题含三个独立的真假判断；11 月 6 日在指定考点进行 240 分钟的开放题考试，共 5 题，要求写出完整论证. 测试用于选拔进入开放题部分的选手，晋级第二阶段则只依据开放题成绩.

本文为 2026 年 10 月 15 日测试部分全部试题及官方解答的中文翻译. 每题的三个判断全对得 2 分，答对两个得 1 分，其余得 0 分，满分 24 分. 请分别判断每题的 a、b、c 三个命题是否正确.

第 1 题

数 $(\sqrt{6}+\sqrt{7})^{2026}+(\sqrt{6}-\sqrt{7})^{2026}$：

a）是无理数；

b）能被 2 整除；

c）能被 3 整除.

第 2 题

数 $1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+2025\cdot 2026+2026\cdot 1$：

a）大于 $1^2+2^2+\cdots+2026^2$；

b）大于 $1\cdot 2026+2\cdot 2025+\cdots+2025\cdot 2+2026\cdot 1$；

c）小于 $1\cdot 3+2\cdot 4+\cdots+2024\cdot 2026+2025\cdot 1+2026\cdot 2$.

第 3 题

在三角形 ABC 中，$AB=6$，$AC=10$. 在线段 AC 上取点 D，使 $AD=6$；在射线 AB 上取点 E，使 $AE=10$. 线段 BC 与 DE 相交于点 P. 则：

a）射线 AP 平分 $\angle BAC$；

b）三角形 APB 与三角形 APC 的面积之比为 $\dfrac{9}{25}$；

c）B, D, C, E 四点共圆.

第 4 题

有 101 人参加一个聚会，其中有些人互相认识．约定：若 A 认识 B，则 B 也认识 A．则：

a）可能每个人都恰好认识 13 人；

b）一定有两个人认识的人数相同；

c）如果每个人都恰好认识 4 人，那么一定有三个人两两认识.

第 5 题

对每个实数 c，考虑关于实数 x, y 的方程组

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ c(x + y) = 1. \end{cases}$$

则：

a）存在无穷多个实数 c，使该方程组无解；

b）存在实数 c，使该方程组恰有一组解；

c）存在实数 c，使该方程组恰有三组解.

第 6 题

设 $N = 3^{12} + 3^9 \cdot 7^2 + 3^5 \cdot 7^4 + 7^6$．则：

a）N 是一个整数的平方；

b）N 恰有 64 个正因数；

c）使 kN 为整数平方的最小正整数 k 等于 130.

第 7 题

给定乘积为 1 的正实数 $x_1, x_2, \ldots, x_{12}$．则：

a）其中至少有六个数不小于 1；

b）可以将这些数分成分别含五个数和七个数的两组，使第一组五个数的乘积不大于第二组七个数的乘积；

c）如果任意三个数的乘积都不小于 1，那么这十二个数都等于 1.

第 8 题

多项式 $P(x)=x^{2026}+x^{2025}+\cdots+x^2+x+1$：

a）没有实数零点；

b）满足 $P(2)>2^{2027}$；

c）在区间 $[-1,1]$ 上为增函数.

第 9 题

给定正四面体 $ABCS$. 点 X,Y 分别在棱 AB,AS 上，且 $AX:XB=1:2$，$AY:YS=3:1$. 则：

a）平面 CXY 垂直于平面 ABC；

b）四面体 $AXCY$ 的体积是四面体 $ABCS$ 体积的 $\dfrac{1}{4}$；

c）三角形 CXY 的最长边是 CX.

第 10 题

在边长为 10 的等边三角形内放置 101 个点，其中任意三点都不共线. 则：

a）一定有两点之间的距离不大于 1；

b）一定有三点是某个锐角三角形的三个顶点；

c）一定有三点是某个面积不大于 1 的三角形的三个顶点.

第 11 题

数 2026^n-1：

a）对每个整数 $n\geq 1$，都能被 45 整除；

b）对无穷多个整数 $n\geq 1$，能被 $n+1$ 整除；

c）对无穷多个整数 $n\geq 1$，能被 2027 整除.

第 12 题

对任意正整数，考虑如下过程：每一步都将当前的数替换成它的十进制各位数字之和，直到得到一位数时停止. 则：

a）从 14^{1000} 开始，最终得到 5；

b）从 $(10^9)!$ 开始，至多四步就会停止；

c）从由 1000 个 11 构成、幂运算自上而下计算的幂塔

$$\underbrace{11^{11^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{11}}}}}}_{1000\text{ 个 }11}$$

开始，最终得到 5.