

排版支持 <https://www.encifanggen.com/tools/markdown/>

题目 给定整数 $n \geq 4$. 将 n 个正实数 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 依次排成一圈, 且 $b_i = (x_{i-1} + x_{i+1})/x_i$ 均为整数, 下标按模 n 理解. 求 $b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2$ 的最大值, 并确定达到最大值的全部整数序列.

解答 由 $b_i x_i = x_{i-1} + x_{i+1}$, 得

$$\sum_{i=1}^n (b_i - 2)x_i = 0.$$

由于 $x_i > 0$, 且各 b_i 均为正整数, 若没有一项等于 1, 则各项必全为 2.

若 $b_i = 1$, 则 $x_i = x_{i-1} + x_{i+1}$, 故 x_i 大于两侧的项, 两个等于 1 的比值不能相邻. 当 $n \geq 4$ 时, 删去 x_i , 其两侧的比值各减少 1, 其余比值不变, 所得序列仍满足题设的整数性条件. 以 u, v 记删项后相邻的两项, 这一变化可写为

$$(u+1, 1, v+1) \mapsto (u, v).$$

当 $n = 3$ 时, 若各项不全为 2, 不妨设 $b_1 = 1$. 此时 $(b_2 - 1)x_2 = 2x_3$, $(b_3 - 1)x_3 = 2x_2$, 从而 $(b_2 - 1)(b_3 - 1) = 4$. 因此, 三项情形只有 $(2, 2, 2)$ 、 $(1, 3, 3)$ 、 $(1, 2, 5)$ 及其排列, 比值之和至多为 8, 最大项至多为 5.

由此对环长归纳. 对于 $n \geq 4$, 若各项不全为 2, 则可删去一项等于 1 的比值所对应的正实数. 由归纳假设, 删项后的比值之和至多为 $3(n-1) - 1$, 最大项至多为 $n+1$; 还原时, 比值之和增加 3, 每个保留的比值至多增加 1. 全为 2 时也满足相应的估计, 故对所有 $n \geq 3$, 均有

$$\sum_{i=1}^n b_i \leq 3n - 1, \quad \max_{1 \leq i \leq n} b_i \leq n + 2. \quad (1)$$

再证: 当 $n \geq 5$ 且序列中有 1 时, 存在 i , 使得

$$b_i = 1, \quad b_{i-1} + b_{i+1} \leq n + 4. \quad (2)$$

反设每个 1 的两邻项之和均不小于 $n+5$. 设 1 的个数为 q , 记

$$T = \sum_{b_i \geq 2} (b_i - 2) = \sum_{i=1}^n b_i - 2n + q \leq n + q - 1.$$

由于 1 不相邻, 每个 1 两侧的比值均不小于 2, 故反设给出 $T \geq n+1$. 另一方面, 对所有满足 $b_i = 1$ 的 i 求和时, 每个正的 $b_j - 2$ 至多被计入两次, 因而

$$q(n+1) \leq \sum_{b_i=1} (b_{i-1} + b_{i+1} - 4) \leq 2T \leq 2(n+q-1).$$

由 $n+1 \leq T \leq n+q-1$ 得 $q \geq 2$, 而后一不等式给出 $(q-2)(n-1) \leq 0$, 故 $q = 2$, 且 $T = n+1$. 此时上述计数中的不等式均取等, 所以每个大于 2 的比值都必须在计数中出现两次, 即同时与这两个 1 相邻. 由于 $n \geq 5$, 这两个 1 至多有一个公共邻项, 故至多有一项比值大于 2. 由 (1) 得 $T \leq n$, 与 $T = n+1$ 矛盾.

记 $S = \sum_{i=1}^n b_i^2$. 以下对 $n \geq 4$ 归纳证明 $S \leq n^2 + 8n - 1$, 并证明等号成立时, 序列必为

$$(n+2, 1, \underbrace{2, \dots, 2}_a, 3, \underbrace{2, \dots, 2}_b, 1), \quad (3)$$

或其循环移位、反向排列, 其中 a, b 为非负整数, 且 $a + b = n - 4$.

各项全为 2 时, $S = 4n < n^2 + 8n - 1$. 以下设序列中有 1. 删去其中一项 1 所对应的正实数, 记所得序列的平方和为 S' , 删项后相邻的两项为 u, v . 由删项规则,

$$S - S' = (u+1)^2 + 1 + (v+1)^2 - u^2 - v^2 = 2(u+v) + 3.$$

当 $n = 4$ 时, 由三项情形的分类, 有 $S' \leq 30$, $u + v \leq 7$, 故

$$S = S' + 2(u+v) + 3 \leq 30 + 2 \cdot 7 + 3 = 47.$$

若 $S = 47$, 则删项后的三项必为 $(1, 2, 5)$, 且 $\{u, v\} = \{2, 5\}$. 还原后, 原序列为 $(6, 1, 3, 1)$ 的循环移位或反向排列, 符合 (3).

设 $n \geq 5$, 且结论对 $n-1$ 成立. 取满足 (2) 的 i , 删去 x_i , 则 $u + v \leq n + 2$. 由归纳假设,

$$\begin{aligned} S &= S' + 2(u+v) + 3 \\ &\leq (n-1)^2 + 8(n-1) - 1 + 2(n+2) + 3 \\ &= n^2 + 8n - 1. \end{aligned}$$

若等号成立, 则删项后的序列也须达到相应上界, 且 $u + v = n + 2$. 由归纳假设, 删项后序列的最大项为 $n + 1$, 其两侧均为 1; 任何不含最大项的相邻两项之和至多为 $5 < n + 2$. 故还原只能发生在最大项与相邻的 1 之间, 相应的变化为

$$(n+1, 1) \mapsto (n+2, 1, 2)$$

或其反向形式. 于是最大项增加 1, 某一侧的 2 的个数也增加 1, 因而原序列仍具有 (3) 的形式.

反之, 式 (3) 中的各序列均可实现. 在相邻的正实数 x, y 之间插入 $x+y$, 其相应比值便由 (u, v) 变为 $(u+1, 1, v+1)$. 取正实数环 $(1, 3, 2, 3)$, 其比值序列为 $(6, 1, 3, 1)$. 以此为起点, 每次选取最大项及其一侧相邻的 1 进行上述插项操作; 在两侧分别进行 a 次、 b 次, 即得到 (3). 这些序列的平方和均为

$$(n+2)^2 + 1 + 1 + 9 + 4(n-4) = \boxed{n^2 + 8n - 1}.$$

故所求最大值为 $n^2 + 8n - 1$, 全部取等序列为 (3) 及其循环移位、反向排列.

原题 (1984 年全苏数学奥林匹克) 给定整数 $n \geq 4$. 将 n 个正整数 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 依次排成一圈, 且 $b_i = (x_{i-1} + x_{i+1})/x_i$ 均为整数, 下标按模 n 理解. 求证:

$$2n \leq b_1 + b_2 + \dots + b_n \leq 3n.$$