2026 年第 42 届中国数学奥林匹克

第一天

第 1 题

若正整数数列 $\{a_n\}$ 对每个正整数 n 都满足下式，就称它为好数列：

$$a_{n+1}=\begin{cases}a_n-1, & a_n>1,\\ n, & a_n=1.\end{cases}$$

设 m,t 为不小于 2 的整数，且好数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=m=\dfrac{a_1+\cdots+a_t}{t}$.

(1) 证明 $t\geq\dfrac{5}{2}m$.

(2) 求使得对上述所有 m,t 都有 $t\leq Cm$ 的最小实数 C.

第 2 题

求证：存在一个正整数 N，使得对每个整数 $n\geq N$，都能找到一个与 $n!+1$ 互质的整数 a，且 $a-1,a^2-1,\ldots,a^{n^2}-1$ 中没有一个是 $n!+1$ 的倍数.

第 3 题

设 $a>b$ 为互质且奇偶性不同的正整数. 一只跳跳羊从平面直角坐标系的原点 $(0,0)$ 出发，每次可进行下列两类跳跃之一：

- 甲类：将当前坐标加上 $(a,b),(-b,a),(-a,-b),(b,-a)$ 中的任一个向量；
- 乙类：将当前坐标加上 $(b,a),(-a,b),(-b,-a),(a,-b)$ 中的任一个向量.

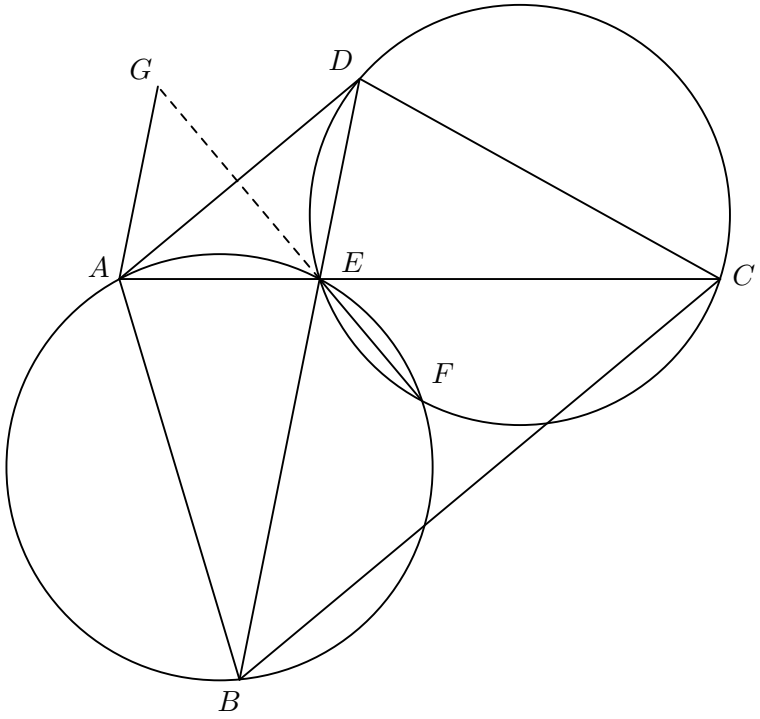
(1) 证明存在整点 P，无论允许多少次乙类跳跃，只要甲类跳跃不超过 $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}-100$ 次，就无法从原点到达 P.

(2) 证明存在距原点不超过 $\sqrt{a^2+b^2}$ 的整点 Q，使得从原点到达该点所需的跳跃次数超过 $\dfrac{\sqrt{2}\,a(a+b)}{\sqrt{a^2+2ab-b^2}}-100$ 次.

第二天

第 4 题

在四边形 $ABCD$ 中，$AD \parallel BC$，对角线 AC 与 BD 交于点 E．在 $\triangle BCE$ 内有一点 F，使得 A, B, F, E 和 C, D, E, F 分别共圆．过 A 作 BD 的平行线，交 FE 的延长线于点 G．已知 $AE^2 = EF \cdot EG$，求 $\dfrac{AD}{BC}$ 的所有可能值．



第 5 题

给定整数 $d \geq 2$ 和非负整数 M．S 是 N 个 d 元非负整数组构成的集合，设 a_i 是 S 中全体数组第 i 个分量的算术平均值，满足

$$a_i \leq M \ (1 \leq i \leq d-1), \qquad a_d \leq 3M + 1.$$

求 N 的最大可能值．

第 6 题

设正整数 $m < n$．记 $F(m, n)$ 为使下述命题成立的最小实数 C：存在下标 $1 \leq i_1 < \cdots < i_m \leq n$，使得对任意实数 $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n$，若 $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$，$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$，则

$$0 \leq x_{i_1} + \cdots + x_{i_m} \leq C.$$

（1）求 $F(20, 26)$ 的值．

（2）证明：对所有充分大的正整数 n，均有 $\min\limits_{1 \leq m < n} F(m, n) < 0.85$．