2027 学年度韩国大学修学能力考试数学卷

中文试题与逐题解答

第 2 考试时段 · 数学 · 2026 年 11 月 19 日

全卷包括公共部分第 1—22 题，以及概率与统计、微积分、几何三组选考题（各为第 23—30 题）。奇数型与偶数型仅公共部分第 7、9 题的选项顺序有别，本文在相应题下分别列出。公共部分第 1—15 题及各选考第 23—28 题为五选一，其余为简答题。原卷各部分提醒考生核对答题卡填写及所选科目。

题目由韩国教育课程评价院命制，版权归该院。中文译文附独立撰写的解答，答案与考试当天公布的答案表核对。评价院计划于 2026 年 12 月 1 日公布最终答案。

官方试卷与答案发布页

公共部分

第 1 题 | 2 分

求 $\sqrt[3]{32}\times 4^{-1/3}$ 的值.

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

答案　②，2.

解答　合并同次根式，得 $\sqrt[3]{32/4}=\sqrt[3]{8}=2$.

第 2 题 | 2 分

已知 $f(x)=2x^4+2x$，求 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ 的值.

① 6　② 7　③ 8　④ 9　⑤ 10

答案　⑤，10.

解答　由导数定义，所求极限为 $f'(1)$. 由 $f'(x)=8x^3+2$，得 $f'(1)=10$.

第 3 题 | 3 分

等比数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数，且 $a_1=1$、$a_5=3a_3$. 求 a_7.

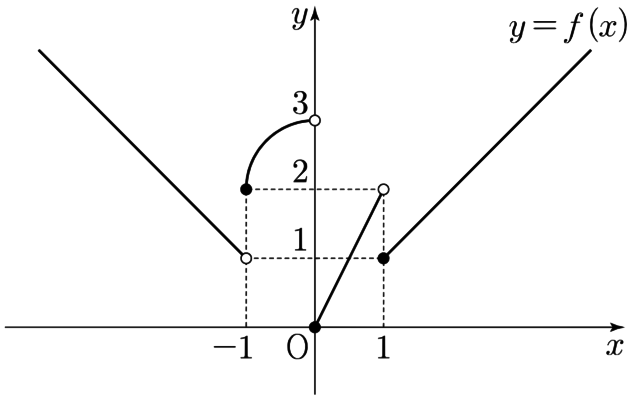
① 9　② $9\sqrt{3}$　③ 27　④ $27\sqrt{3}$　⑤ 81

答案　③，27.

解答　设公比为 r. 由 $a_5/a_3=3$，得 $r^2=3$，故 $a_7=a_1(r^2)^3=27$.

第 4 题 | 3 分

已知函数 $y=f(x)$ 的图像如图所示，求 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)+\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ 的值.



① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

答案　④，4.

解答　沿图像从左侧趋近 $x=0$，纵坐标趋于 3；从右侧趋近 $x=1$，纵坐标趋于 1. 所求为 $3+1=4$.

第 5 题 | 3 分

多项式函数 $f(x)$ 的一个原函数为 $F(x)=x^3-x^2+x$. 求 $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ 的值.

① 6　② 7　③ 8　④ 9　⑤ 10

答案　①，6.

解答　由微积分基本定理，积分为 $F(2)-F(0)=8-4+2=6$.

第 6 题 | 3 分

设 k 为正数. 若函数 $f(x)=3\sin\dfrac{2\pi x}{k}+k$ 的周期为 8，求 $f(x)$ 的最大值.

① 11　② 12　③ 13　④ 14　⑤ 15

答案　①，11.

解答　函数的最小正周期为 k，所以 $k=8$. 正弦项取到 1 时，函数取最大值 $3+8=11$.

第 7 题 | 3 分

设 a 为常数. 函数 $f(x)=x^3+ax^2-3ax+1$ 在 $x=1$ 处取得极小值，求 $f(x)$ 的极大值.

奇数型 ① 31 ② 28 ③ 25 ④ 22 ⑤ 19

偶数型 ① 19 ② 22 ③ 25 ④ 28 ⑤ 31

答案 奇数型②，偶数型④，值为 28.

解答 由 $f'(1)=3-a=0$，得 $a=3$. 于是 $f'(x)=3(x+3)(x-1)$，在 $x=-3$ 两侧由正变负，故极大值为 $f(-3)=28$.

第 8 题 | 3 分

已知 $a=\log_2 9$，$b=\log_3 2+\dfrac{1}{\log_8 3}$，求 ab 的值.

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

答案 ③，8.

解答 由换底公式，$1/\log_8 3=\log_3 8=3\log_3 2$. 因此 $ab=2\log_2 3\cdot 4\log_3 2=8$.

第 9 题 | 4 分

点 P 在数轴上运动. 在时刻 t $(t\geq 0)$，它的速度为 $v(t)=3t^2-18t+15$. 求从 $t=0$ 到 $t=2$，点 P 经过的路程.

奇数型 ① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

偶数型 ① 13 ② 12 ③ 11 ④ 10 ⑤ 9

答案 奇数型④，偶数型②，值为 12.

解答 $v(t)=3(t-1)(t-5)$，在 $[0,1)$ 上为正，在 $(1,2]$ 上为负，所以应以 $t=1$ 为界计算路程. 取原函数 $V(t)=t^3-9t^2+15t$，则

$$\int_0^2 |v(t)|\,\mathrm{d}t=V(1)-V(0)+V(1)-V(2)=7+5=12.$$

第 10 题 | 4 分

在三角形 ABC 中，$\sin A:\sin B=3:4$，且 $\cos C=\dfrac{1}{3}$. 若三角形 ABC 的外接圆面积为 17π，求线段 BC 的长.

① $3\sqrt{3}$ ② $4\sqrt{2}$ ③ $4\sqrt{3}$ ④ $5\sqrt{2}$ ⑤ $3\sqrt{6}$

答案 ②，$4\sqrt{2}$.

解答 由正弦定理，设 $BC=3u$、$CA=4u$ $(u>0)$. 由余弦定理，$AB^2=(9+16-24/3)u^2=17u^2$. 又外接圆半径为 $\sqrt{17}$，而 $\sin C=2\sqrt{2}/3$，故 $AB=2\sqrt{17}\sin C=4\sqrt{34}/3$. 于是 $u=4\sqrt{2}/3$，所求为 $4\sqrt{2}$.

第 11 题 | 4 分

设 $f(x)$ 为多项式函数. 曲线 $y=x^2f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y=7x-11$. 求 $f'(1)$.

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

答案 ⑤, 15.

解答 把 $x=1$ 代入切线得 $f(1)=-4$. 在 $x=1$ 处对 $x^2f(x)$ 求导, 得 $2f(1)+f'(1)=7$, 故 $f'(1)=15$.

第 12 题 | 4 分

设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n. 已知 $a_3=|a_8|$、$S_3=S_8+15$, 求 S_4.

① 66 ② 69 ③ 72 ④ 75 ⑤ 78

答案 ③, 72.

解答 $a_4+\cdots+a_8=-15$, 由等差性得 $5a_6=-15$, 即 $a_6=-3$. 若 $a_3=a_8$, 则公差为零, 导致 $a_3=-3<0$, 与 $a_3=|a_8|$ 矛盾. 因此 $a_3=-a_8$. 设公差为 d, 则 $0=a_3+a_8=(-3-3d)+(-3+2d)$, 得 $d=-6$. 前四项依次为 $27,21,15,9$, 故 $S_4=72$.

第 13 题 | 4 分

对实数 t 和多项式函数 $f(x)$, 定义

$$g(t)=\int_0^2|f(x)-t|\,\mathrm{d}x.$$

选出下列各项中所有正确的项.

甲. 若 $f(x)=-x+1$, 则 $g(0)=1$.

乙. 若 $f(x)=x^2-4x$, 则 $g(-3)=\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x-\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

丙. 若 $f(x)=x^2(x-4)$, 且实数 α 满足 $g(\alpha)=\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x-\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$, 则 $\alpha<f(1)$.

① 甲 ② 甲、乙 ③ 甲、丙 ④ 乙、丙 ⑤ 甲、乙、丙

答案 ②, 甲、乙.

解答

甲: $\displaystyle\int_0^2|1-x|\,\mathrm{d}x$ 等于两个面积均为 $\frac{1}{2}$ 的三角形的面积之和, 因此甲正确.

乙: $f(x)+3=(x-1)(x-3)$, 在 $[0,1]$ 非负, 在 $[1,2]$ 非正. 去掉绝对值后, 两个等长积分区间上的常数 3 相抵, 恰得乙中的式子.

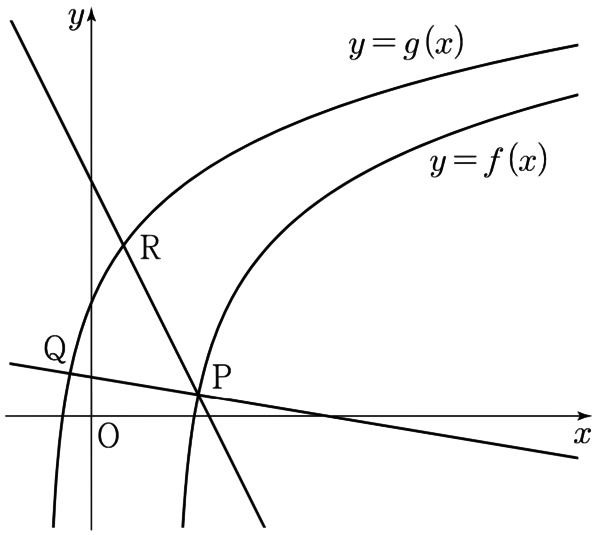
丙: $f'(x)=x(3x-8)<0$ $(0<x\le 2)$, 故取 $\alpha=f(1)$ 时, $f(x)-\alpha$ 在 $[0,1]$ 非负、在 $[1,2]$ 非正. 分段积分后, 常数 α 抵消, 所得等式满足题设, 却不满足 $\alpha<f(1)$, 所以丙错误.

第 14 题 | 4 分

设常数 $a>1$，有两个函数

$$f(x)=\log_a(x-4)+1,\qquad g(x)=\log_a(x+2)+2.$$

过曲线 $y=f(x)$ 上的点 $P(5,1)$ 作斜率为 $-\frac{1}{6}$ 的直线，记它与曲线 $y=g(x)$ 的交点为 Q. 过点 P 的直线 $y=-2x+11$ 与曲线 $y=g(x)$ 交于点 R. 若三角形 PQR 的重心在直线 $y=2x$ 上，求 a^6.



① $\frac{11}{4}$　② 3　③ $\frac{13}{4}$　④ $\frac{7}{2}$　⑤ $\frac{15}{4}$

答案　④，$\frac{7}{2}$.

解答　直线 PQ 为 $y=(11-x)/6$，它与 $y=g(x)$ 都经过 $(-1,2)$. 两者在公共定义域内分别严格递减、严格递增，故 $Q=(-1,2)$. 设 $R=(r,11-2r)$. 重心的纵坐标为横坐标的两倍，故 $1+2+11-2r=2(5-1+r)$，得 $r=\frac{3}{2}$. 因此 $R=(\frac{3}{2},8)$，代入 g 得 $\log_a(7/2)=6$，即 $a^6=\frac{7}{2}$.

第 15 题 | 4 分

设 $f(x)=x^3-5x^2+4x$，并定义

$$g(x)=(2x-6)\lim_{t\to x^+}\frac{f(t)}{|f(t)|}.$$

将定义在实数集上的函数 $g(x^2)$ 的所有不连续点的横坐标按从小到大的顺序记为 a_1、a_2、…、a_n（n 为自然数）. 求 $n+g(a_3)$.

① 4　② 6　③ 8　④ 10　⑤ 12

答案　③，8.

解答　$f(t)=t(t-1)(t-4)$. 在正半轴上，f 在 $1,4$ 处变号，而因子 $2x-6$ 在这两处都不为零，故 g 在 $1,4$ 处跳跃. 平方映射在 $\pm1,\pm2$ 附近均穿过对应的跳跃点，故 $g(x^2)$ 在这四处不连续. 在 $x=0$，平方后的自变量只从右侧趋于 0，与 $g(0)$ 的右取值一致，因此连续. 其余各处符号恒定，函数连续. 所以 $n=4$、$a_3=1$，且 $g(1)=(2-6)(-1)=4$，所求为 8.

第 16 题 | 3 分

求满足 $5^x=\left(\dfrac{1}{25}\right)^{x-3}$ 的实数 x.

答案　2.

解答　将右端写成 $5^{-2(x-3)}$，得 $x=-2(x-3)$，所以 $x=2$.

第 17 题 | 3 分

已知多项式函数 $f(x)$ 满足 $f'(x)=6x^2+1$、$f(1)=5$. 求 $f(2)$.

答案　20.

解答　$f(x)=2x^3+x+C$. 由 $f(1)=5$ 得 $C=2$，因此 $f(2)=16+2+2=20$.

第 18 题 | 3 分

已知 $\displaystyle\sum_{k=1}^{5}(2k+a)=\sum_{k=1}^{5}k^2$，求常数 a.

答案　5.

解答　左边为 $30+5a$，右边为 $1+4+9+16+25=55$，故 $a=5$.

第 19 题 | 3 分

求正数 k，使曲线 $y=x^3-3x^2-24x+3$ 与直线 $y=k$ 恰有两个交点.

答案　31.

解答　记该三次函数为 f. 由 $f'(x)=3(x+2)(x-4)$，它在 -2 处取得极大值 31，在 4 处取得极小值 -77，且三个单调区间上的单调性均严格. 结合两端分别趋于 $-\infty,+\infty$，水平线恰在极大或极小的高度与图像交于两点. 由于 $k>0$，得 $k=31$.

第 20 题 | 4 分

设 a,b,c 为常数，$a>0$、$b>1$. 闭区间 $[0,2b]$ 上有两个函数

$$f(x)=a\sin\frac{\pi x}{b},\qquad g(x)=x^2-2(b+1)x+c.$$

设两条曲线 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 存在两个不同的交点 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$，其中 $x_1<b<x_2$，并满足 $y_2(x_1-b)=y_1(x_2-b)$.

当直线 OA、OB 的斜率之和为 $\dfrac{100}{11}$ 时，下面是将 a 表示成关于 b 的式子的过程，其中 O 为原点.

设过 A,B 的直线为 ℓ. 由题设，$\dfrac{y_1}{x_1-b}=\dfrac{y_2}{x_2-b}$，故 ℓ 经过 $(b,0)$. 由 $y=f(x)$ 图像的性质，线段 AB 的中点为 $(b,0)$，所以 $x_1+x_2=2b$、$y_1+y_2=0$.

又因 A,B 是 $y=g(x)$ 与直线 ℓ 的交点，直线 ℓ 的斜率为

$$\frac{[x_2^2-2(b+1)x_2+c]-[x_1^2-2(b+1)x_1+c]}{x_2-x_1}=(\text{甲}),$$

所以 ℓ 的方程为 $y=(\text{甲})\,(x-b)$ ①.

由 $\dfrac{y_1}{x_1}-\dfrac{y_1}{2b-x_1}=\dfrac{100}{11}$ 和①，整理得

$$36x_1^2-72bx_1+11b^2=0\qquad(x_1<b),$$

因此点 A 的横坐标为 (乙) $\times b$.

点 A 是曲线 $y=f(x)$ 与直线 ℓ 的交点，所以 a 可表示为 $a=$(丙).

设 (甲)、(乙) 处应填的数分别为 p,q，(丙) 处应填的式子为 $h(b)$. 求 $6\big(p+q+h(9)\big)$ 的值.

答案 169.

解答 先说明题面所用的中点关系. 设 $u=b-x_1$、$v=x_2-b$，则 $u,v\in(0,b]$. 两点与 $(b,0)$ 共线，把正弦值代入斜率，有 $\sin(\pi u/b)/u=\sin(\pi v/b)/v$. 函数 $\sin z/z$ 在 $(0,\pi]$ 严格递减，因为 $\sin z-z\cos z$ 从 0 增至正值，其导数为 $z\sin z$. 故 $u=v$，从而得到中点关系.

二次函数的割线斜率为 $x_1+x_2-2(b+1)=-2$，即 $p=-2$. 题面给出的二次方程可写成 $36(x_1-b)^2=25b^2$，故 $x_1=b/6$，即 $q=\frac16$. 将 x_1 代入直线方程，得 $y_1=5b/3$；将它代入正弦函数，得 $y_1=a\sin(\pi/6)=a/2$. 于是 $h(b)=10b/3$，所求为 $6(-2+\frac16+30)=169$.

第 21 题 | 4 分

设 $f(x)$ 是首项系数为 1 的三次函数. 对实数 t，令 $g(t)$ 为 f 在 $(-\infty,t]$ 上的最大值与 f 在 $[t,\infty)$ 上的最小值之积. 已知下列条件成立.

(甲) 对某个正数 a，有

$$\lim_{t\to a^-}\frac{g(t)-g(a)}{t-a}-\lim_{t\to a^+}\frac{g(t)-g(a)}{t-a}=36.$$

(乙) 使 $g'(b)=0$ 的实数 b 的最大值为 2，最小值为 -1.

求 $f(5)$.

答案 135.

解答 导数跳跃来自区间最值在「端点值」与「极值」之间切换. 若 f 单调递增，则 $g=f^2$，没有导数跳跃. 故 f 有极大点 u 和极小点 v，其中 $u<v$. 记 $A=f(u)$、$B=f(v)$，则

$A>B$. 设 $r<u$ 满足 $f(r)=B$，$s>v$ 满足 $f(s)=A$. 由三次函数的单调性，

$$g(t)=\begin{cases} f(t)^2, & t\le r \text{ 或 } t\ge s,\\ Bf(t), & r<t<u,\\ AB, & u\le t\le v,\\ Af(t), & v<t<s. \end{cases}$$

由重根分解，

$$f(t)-B=(t-v)^2(t-r),\qquad f(t)-A=(t-u)^2(t-s).$$

比较两式的二次项系数与 $f'(t)=3(t-u)(t-v)$，设 $d=v-u>0$，得

$$r=v-\tfrac{3}{2}d,\qquad s=u+\tfrac{3}{2}d,\qquad f'(r)=f'(s)=\tfrac{9}{4}d^2.$$

在 u,v 处，g 的左右导数均为零. 在 r,s 处，左导数减右导数分别为 $Bf'(r)$、$-Af'(s)$，因此只需考察 $B>0$ 或 $A<0$.

若 $B>0$，则 f 仅在 r 左侧有一个零点；由分段式，g' 最左零点是该点，最右零点是 v. 于是 $f(-1)=0$、$v=2$，得 $B=9(1+r)=9(3-\frac{3}{2}d)$. 要在正数处出现正跳跃，须有 $r>0$，即 $d<\frac{4}{3}$.

若 $A<0$，则 f 仅在 s 右侧有一个零点；g' 最左零点是 u，最右零点是该点. 于是 $u=-1$、$f(2)=0$，得 $-A=9(2-s)=9(3-\frac{3}{2}d)$.

两种情形的正跳跃均为 $\frac{81}{4}d^2(3-\frac{3}{2}d)$，且恒有

$$36-\frac{81}{4}d^2\left(3-\frac{3}{2}d\right)=\frac{81}{8}\left(d-\frac{4}{3}\right)^2(3d+2)\ge 0.$$

跳跃等于 36，故 $d=\frac{4}{3}$. 第一种情形被排除. 在第二种情形中，$u=-1$、$s=1$、$A=-9$，所以 $f(t)=(t+1)^2(t-1)-9$，从而 $f(5)=135$.

第 22 题 | 4 分

数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数，且对一切自然数 n 有 $a_n=a_{n+6}=a_{n+9}$. 另有

（甲） $3a_5+2a_6+3a_{10}=11,$

（乙） $\sum\limits_{k=1}^{20}a_k=26,\qquad \sum\limits_{k=1}^{35}\log_2 a_k=-10.$

求 $\sum\limits_{k=1}^{40}\dfrac{1}{a_ka_{k+1}}$ 的值.

答案 98.

解答 由 $a_{n+3}=a_{n+9}=a_n$，可按三项一组. 记前三项为 x,y,z. 由前两条数值关系，

$$3(x+y)+2z=11,\qquad 7(x+y)+6z=26,$$

因此 $x+y=\frac{7}{2}$、$z=\frac{1}{4}$. 对数和给出 $(xy)^{12}z^{11}=2^{-10}$，由正性得 $xy=2$. 所求的前 39 项为 13 个完整周期，第 40 项为 $1/(xy)$，故

$$\sum_{k=1}^{40}\frac{1}{a_k a_{k+1}}=\frac{14}{xy}+13\frac{x+y}{xyz}=7+91=98.$$

选考 | 概率与统计

第 23 题 | 2 分

从 a,b 两个字母中允许重复地选取 7 个字母，再排成一列. 不同的排列有多少种?

① 120　② 124　③ 128　④ 132　⑤ 136

答案　③，128.

解答　每个位置都可以填 a 或 b，且选择互不限制，共有 $2^7=128$ 种.

第 24 题 | 3 分

对两个事件 A,B，已知 $P(A\cup B)=\frac{3}{4}$、$P(A)=\frac{1}{2}$、$P(B)=\frac{5}{12}$. 求 $P(A\cap B)$.

① $\frac{1}{12}$　② $\frac{1}{6}$　③ $\frac{1}{4}$　④ $\frac{1}{3}$　⑤ $\frac{5}{12}$

答案　②，$\frac{1}{6}$.

解答　由概率加法公式，$P(A\cap B)=\frac{1}{2}+\frac{5}{12}-\frac{3}{4}=\frac{1}{6}$.

第 25 题 | 3 分

随机变量 X 服从二项分布 $\mathrm{B}(n,\frac{2}{3})$，且标准差 $\sigma(X)=4$. 求 $n+\mathrm{E}(X)$.

① 100　② 105　③ 110　④ 115　⑤ 120

答案　⑤，120.

解答　由 $16=n\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}$，得 $n=72$，故 $\mathrm{E}(X)=72\cdot\frac{2}{3}=48$，所求为 120.

第 26 题 | 3 分

掷一枚骰子两次，所得点数依次为 a,b. 求 $5\le ab\le 28$ 的概率.

① $\frac{1}{4}$　② $\frac{13}{36}$　③ $\frac{17}{36}$　④ $\frac{7}{12}$　⑤ $\frac{25}{36}$

答案　⑤，$\frac{25}{36}$.

解答　36 个有序结果等可能. 当 a 依次取 $1,2,3,4,5,6$ 时，满足 $ab<5$ 的 b 分别有 $4,2,1,1,0,0$ 个，共 8 个. 满足 $ab>28$ 的是 $(5,6),(6,5),(6,6)$，共 3 个. 故所求概率为 $(36-8-3)/36=25/36$.

第 27 题 | 3 分

某农场每个香瓜的重量服从均值为 m、标准差为 σ 的正态分布. 从该农场的香瓜中随机抽取 64 个, 测得样本均值为 $\bar{x}$, 并据此得到总体均值 m 的 95% 置信区间为 $252.16 \le m \le 267.84$. 求 $\bar{x}+\sigma$.

重量单位为克. 若 Z 服从标准正态分布，计算时取 $P(|Z| \le 1.96) = 0.95$.

① 292　② 296　③ 300　④ 304　⑤ 308

答案　①，292.

解答　该区间的中点为 $\bar{x} = 260$，半宽为 $1.96\,\sigma/\sqrt{64} = 7.84$，得 $\sigma = 32$. 因此 $\bar{x}+\sigma = 292$.

第 28 题 | 4 分

有 9 张卡片，上面的数分别为 $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 4$. 将每张卡片恰用一次，排成一列，记从左到右的数为 $x_1, x_2, \ldots, x_9$. 求使下列条件对所有不超过 8 的正整数 k 都成立的排列数. 相同数字的卡片不作区分.

$x_k x_{k+1}$ 为自然数，或者 $x_k = x_{k+1}$.

① 720　② 760　③ 800　④ 840　⑤ 880



答案　③，800.

解答　唯一禁止相邻的两种数是 $\frac{1}{2}$ 与 1. 先排三张 2 和一张 4，按 4 的位置有 4 种次序，它们形成 5 个空档（包括两端）. 每个空档可为空、只放 1，或只放 $\frac{1}{2}$.

两张 $\frac{1}{2}$ 在同一空档时，有 5 种选法，三个 1 可分配到其余四个空档，共 $\binom{6}{3}$ 种，合计 100 种. 两张 $\frac{1}{2}$ 分居两个空档时，有 $\binom{5}{2}$ 种选法，三个 1 分配到其余三个空档，有 $\binom{5}{2}$ 种，合计也是 100 种. 所以总数为 $4(100+100) = 800$.

第 29 题 | 4 分

设 $k > 0$，离散型随机变量 X 的概率分布如下.

x	$-3k$	$-2k$	$-k$	k	$2k$	$3k$	合计
$P(X=x)$	a^2	b	a	a	b	a^2	1

若 $1 \le \mathrm{V}(X) \le \sigma(X)$，则 k^2 的最大值为 $\dfrac{q}{p}$，其中 p,q 为互质的正整数．求 $p+q$.

答案 41.

解答 由 $\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}$ 可知 $\mathrm{V}(X)=1$．分布关于零对称，故 $\mathrm{E}(X)=0$．由概率总和为 1，有 $a^2+b+a=\frac{1}{2}$，从而

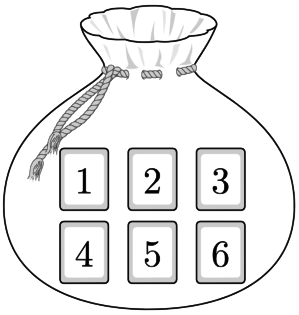
$$1=k^2(18a^2+8b+2a)=k^2\left[10\left(a-\tfrac{3}{10}\right)^2+\tfrac{31}{10}\right].$$

因此 $k^2 \le \frac{10}{31}$．取 $a=\frac{3}{10}$、$b=\frac{11}{100}$ 时各概率非负、总和为 1，且 $k^2=\frac{10}{31}$ 恰使方差等于 1．故 $p+q=31+10=41$.

第 30 题 | 4 分

袋中有 6 张卡片，分别标有自然数 1 至 6．每次从中随机同时取出 3 张，查看数字后放回．记取出的三个数之和为 3 的倍数为事件 A，三个数的最大值至少为 5 为事件 B.

重复试验 3 次，设 A 发生 a 次，B 发生 b 次．在 $a+b=4$ 的条件下，三次都取到标有 6 的卡片的概率为 $\dfrac{q}{p}$，其中 p,q 为互质的正整数．求 $p+q$.



答案 15.

解答 每次有 $\binom{6}{3}=20$ 种等可能的三元组．按三个模 3 余数分类，每类只有两个数，所以 A 恰在各取一种余数时发生，共 8 种．不发生 B 的有 $\binom{4}{3}=4$ 种，其中满足 A 的是 $\{1,2,3\},\{2,3,4\}$．因此单次试验对 $a+b$ 贡献 $0,1,2$ 的结果数依次为 $2,12,6$.

三次贡献之和为 4，只可能是 $2,2,0$ 或 $2,1,1$ 的排列，故共有

$$3\cdot 6^2\cdot 2+3\cdot 6\cdot 12^2=2808$$

种结果．单次含 6 的有 $\binom{5}{2}=10$ 种，均满足 B；其中另两张分别取自 $\{1,4\}$ 和 $\{2,5\}$ 时也满足 A，有 4 种．三次均含 6 时，贡献只能是 $2,1,1$ 的排列，符合的结果数为 $3\cdot 4\cdot 6^2=432$．条件概率为 $432/2808=2/13$，所以 $p+q=15$.

选考｜微积分

第 23 题｜ 2 分

求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-3x)}{x}$ 的值.

① -3　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 3

答案　①，-3.

解答　该极限为函数 $\ln(1-3x)$ 在 $x=0$ 处的导数，等于 $-3/(1-3x)|_{x=0}=-3$.

第 24 题｜ 3 分

求 $\displaystyle\int_0^{\pi} x\sin 4x\,\mathrm{d}x$ 的值.

① $-\pi$　② $-\dfrac{3\pi}{4}$　③ $-\dfrac{\pi}{2}$　④ $-\dfrac{\pi}{4}$　⑤ 0

答案　④，$-\dfrac{\pi}{4}$.

解答　分部积分得

$$\int_0^{\pi} x\sin 4x\,\mathrm{d}x=\left[-\frac{x\cos 4x}{4}+\frac{\sin 4x}{16}\right]_0^{\pi}=-\frac{\pi}{4}.$$

第 25 题｜ 3 分

已知等比数列 $\{a_n\}$ 满足

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n}+a_n}{3\cdot 4^{n-1}}=1.$$

求 a_4.

① 12　② 14　③ 16　④ 18　⑤ 20

答案　①，12.

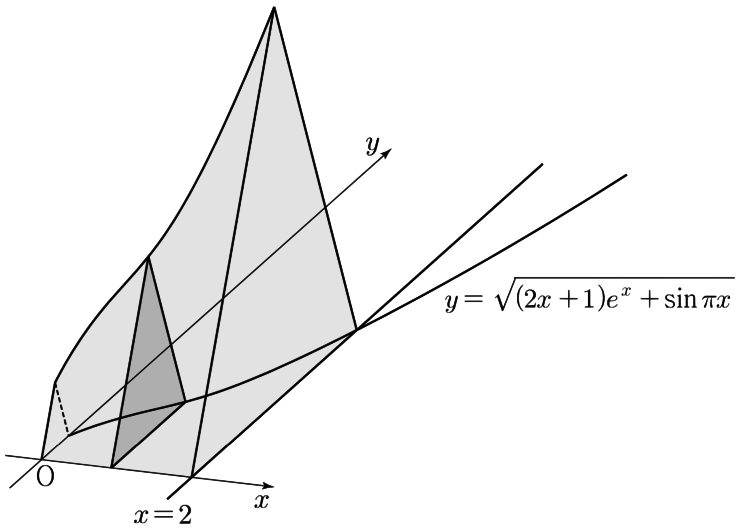
解答　设公比为 r. 若 $|r|\le 1$，分子有界，极限为 0，故 $|r|>1$. 此时 $a_1\neq 0$，且 $a_n/a_{2n}=r^{-n}\to 0$，所以

$$\frac{a_{2n}}{3\cdot 4^{n-1}}=\frac{a_1 r}{3}\left(\frac{r^2}{4}\right)^{n-1}\longrightarrow 1.$$

因此 $r^2=4$、$a_1 r=3$，故 $a_4=(a_1 r)r^2=12$.

第 26 题 | 3 分

如图，一个立体以曲线 $y=\sqrt{(2x+1)e^x+\sin\pi x}$ $(x\geq 0)$、x 轴、y 轴及直线 $x=2$ 所围成的区域为底面．用垂直于 x 轴的平面截这个立体，所得截面均为等边三角形．求该立体的体积．



① $\dfrac{\sqrt{3}(3e^2-2)}{8}$　② $\dfrac{\sqrt{3}(3e^2+1)}{8}$　③ $\dfrac{\sqrt{3}(3e^2+4)}{8}$

④ $\dfrac{\sqrt{3}(3e^2-2)}{4}$　⑤ $\dfrac{\sqrt{3}(3e^2+1)}{4}$

答案　⑤，$\dfrac{\sqrt{3}(3e^2+1)}{4}$.

解答　横坐标为 x 的截面以底面在该处的纵向线段为一边，面积为 $\frac{\sqrt{3}}{4}[(2x+1)e^x+\sin\pi x]$. 在 $[0,2]$ 上积分，正弦项恰好跨过一个完整周期，积分为零．又 $\big((2x-1)e^x\big)'=(2x+1)e^x$，所以体积为

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\,[(2x-1)e^x]_0^2=\frac{\sqrt{3}}{4}(3e^2+1).$$

第 27 题 | 3 分

设 $a>0$．曲线 $C\colon a^2x^2+axy+e^{y^2-1}=7$ 与直线 $y=1$ 交于不同的两点 P,Q．曲线 C 在 P、Q 处的切线交于 R，且三角形 PQR 的面积为 5．求 a.

① $\dfrac{5}{2}$　② $\dfrac{25}{8}$　③ $\dfrac{25}{6}$　④ $\dfrac{25}{4}$　⑤ $\dfrac{25}{2}$

答案　③，$\dfrac{25}{6}$.

解答　作水平缩放 $u=ax$ 后，先在 (u,y) 坐标中求高．代入 $y=1$，有 $u^2+u-6=0$，故两个交点为 $(2,1)$ 与 $(-3,1)$．对 $u^2+uy+e^{y^2-1}$ 求偏导，得到两条切线

$$5(u-2)+4(y-1)=0,\qquad -5(u+3)-(y-1)=0.$$

解得交点满足 $u=-14/3$、$y-1=25/3$. 原坐标下，底边长为 $5/a$，高仍为 $25/3$. 由 $\frac{1}{2}\cdot(5/a)\cdot(25/3)=5$，得 $a=25/6$.

第 28 题 | 4 分

函数 $f(x)=axe^{-bx}+x$（$0<a<e^2$、$b>0$）存在反函数，函数 $g(x)$ 在实数集上可导，且满足下列条件.

（甲）对一切实数 x，有 $f(x-g(x))=x$.

（乙）使 $g(x)=\dfrac{1}{b}$ 的正数 x 恰有一个.

设 k 是满足 $g(k)=\dfrac{1}{b}$ 的正数，且 $f(k)=k+1$. 求 $g(k)+g'(k+1)$ 的值. 已知 $\lim\limits_{x\to+\infty}xe^{-x}=0$，$a,b$ 为常数.

① $\dfrac{e^2-e-1}{2(e+1)}$　② $\dfrac{e(e-1)}{2(e+1)}$　③ $\dfrac{e^2-5}{2(e-1)}$

④ $\dfrac{(e+1)(e-2)}{2(e-1)}$　⑤ $\dfrac{e^2-3}{2(e-1)}$

答案　④，$\dfrac{(e+1)(e-2)}{2(e-1)}$.

解答　由（甲），$g(f(u))=f(u)-u=aue^{-bu}$. 由于 $f(u)=u(1+ae^{-bu})$ 与 u 同号，条件（乙）等价于水平线 $y=1/b$ 与 $y=aue^{-bu}$ 在 $u>0$ 处恰有一个交点. 该曲线从 0 上升，在 $u=1/b$ 达到最大值 $a/(be)$，然后严格下降并趋于 0. 因此 $a=e$，且 $k=f(1/b)=2/b$.

由 $f(k)-k=e(2/b)e^{-2}=1$，得 $b=2/e$. 再对（甲）求导，在 $x=k+1=f(k)$ 处代入，得到 $f'(k)(1-g'(k+1))=1$. 而 $f'(k)=1+e\,e^{-2}(1-2)=1-1/e$，所以

$$g(k)+g'(k+1)=\frac{e}{2}-\frac{1}{e-1}=\frac{(e+1)(e-2)}{2(e-1)}.$$

第 29 题 | 4 分

设 k 为自然数，数列 $\{a_n\}$ 的通项为

$$a_n=\frac{6(8k)^n}{(k^2+15)^n+10}+2k-15.$$

对任意自然数 n 定义

$$b_n=\begin{cases}1, & (a_n-1)(a_{n+1}+1)<0,\\ 0, & \text{其他情形.}\end{cases}$$

求使级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散的所有自然数 k 之和.

答案　12.

解答　只需判断 b_n 是否有无穷多个 1. 记 $r=8k/(k^2+15)$，则 $r-1$ 的符号与 $-(k-3)(k-5)$ 相同.

- $k=4$ 时，$r>1$，所以 $a_n\to+\infty$，最终 $b_n=0$.
- $k=3,5$ 时，$r=1$，分式严格小于 6 且趋于 6. 若 $k=3$，则 $a_n\to-3$，最终 $b_n=0$；若 $k=5$，则 $a_n<1$ 且趋于 1，最终 $a_{n+1}>-1$，所以 $b_n=1$.
- 其余 k 有 $r<1$，且 $a_n>2k-15$、$a_n\to 2k-15$. $k\le 6$ 时极限小于 -1，$k\ge 9$ 时极限大于 1，最终均有 $b_n=0$. $k=7$ 时，a_n 从 -1 上方趋近 -1，最终 $a_n-1<0<a_{n+1}+1$，故最终 $b_n=1$. $k=8$ 时 $a_n>1$，故恒有 $b_n=0$.

因此所求为 $5+7=12$.

第 30 题 | 4 分

函数 $f(x)$ 在实数集上可导，且满足下列条件.

(甲) 对一切实数 x，有 $|f(x)|=|\sin x|\big(\sqrt{1+3\cos^2 x}-1\big)$.

(乙) $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x>0$，且 $\displaystyle\int_{\pi/2}^{3\pi/2} xf(x)\,\mathrm{d}x>0$.

若

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos x\,\mathrm{d}x+\int_{\pi/2}^{\pi} f(x)\cos x\,\mathrm{d}x=\alpha,$$

求 90α.

答案 75.

解答 记 $H(x)=|\sin x|(\sqrt{1+3\cos^2 x}-1)$. 把 $[0,2\pi]$ 分成四个长度为 $\pi/2$ 的区间，在每个开区间内 $H>0$，由连续性，f 的符号恒定. 在 $x=\pi$ 附近，$H(x)/|x-\pi|\to 1$，故 f 在第二、三区间的符号必须相反，左右导数才相同.

四个区间上 H 的积分相同，所以 $\displaystyle\int_0^{2\pi} f>0$ 强制第一、四区间均取正号. 对第二、三区间作配对 $x\leftrightarrow 2\pi-x$. 两处的 H 相同，第三段的权重 x 更大，所以 $\displaystyle\int_{\pi/2}^{3\pi/2} xf>0$ 强制第三段为正、第二段为负. 因此四段上 $f\cos x$ 的符号依次为 $+,+,-,+$.

每段的绝对积分由对称性相同，记为 J. 在第一段令 $u=\cos x$，得

$$J=\int_0^1 u(\sqrt{1+3u^2}-1)\,\mathrm{d}u=\frac{7}{9}-\frac{1}{2}=\frac{5}{18}.$$

整周期积分为 $2J$，题中再加一个第二段积分 J，故 $90\alpha=90\cdot 3J=75$.

选考｜几何

第 23 题｜ 2 分

设向量 $\vec{a}=(1,0)$、$\vec{b}=(3,-2)$，求向量 $2\vec{a}+\vec{b}$ 的各分量之和.

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

答案　③，3.

解答　$2\vec{a}+\vec{b}=(5,-2)$，分量和为 $5-2=3$.

第 24 题｜ 3 分

一条抛物线的焦点为 $(3,0)$，顶点为 $(-1,0)$. 若它经过点 $(0,a)$，求正数 a.

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

答案　④，4.

解答　抛物线向右开口，顶点到焦点的距离为 4，故方程为 $y^2=16(x+1)$. 代入 $(0,a)$，得 $a^2=16$；由 $a>0$，得 $a=4$.

第 25 题｜ 3 分

在空间直角坐标系中，有两个不同的点 $A(a,-3,6)$、$B(-3,b,c)$. 线段 AB 的 $2:1$ 内分点位于 yz 平面上，$3:2$ 外分点位于 x 轴上. 求 $a+b+c$.

① 6　② 7　③ 8　④ 9　⑤ 10

答案　③，8.

解答　内分点为 $(A+2B)/3$，其横坐标为零，所以 $a-6=0$. 外分点为 $3B-2A$，其 y,z 坐标均为零，所以 $3b+6=0$、$3c-12=0$. 因此 $a+b+c=6-2+4=8$.

第 26 题｜ 3 分

椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的两个焦点为 F,F'. 过 F 作垂直于 x 轴的直线，与椭圆交于 P,Q 两点. 若 $PQ=6$、$PF'=7$，求 a^2+b^2.

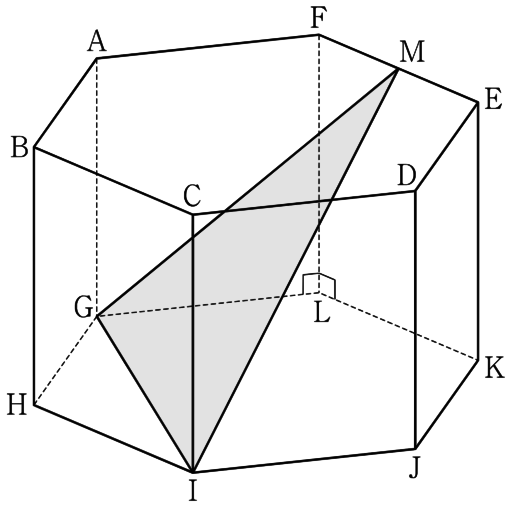
① 32　② 34　③ 36　④ 38　⑤ 40

答案　⑤，40.

解答　由关于 x 轴的对称性，$PF=PQ/2=3$. 椭圆的焦距和性质给出 $2a=PF+PF'=10$，所以 $a=5$. 在直角三角形 PFF' 中，$(FF')^2=7^2-3^2=40$，故半焦距的平方为 10. 因此 $b^2=25-10=15$，所求为 40.

第 27 题 | 3 分

如图，六棱柱 $ABCDEF-GHIJKL$ 的底面是边长为 4 的正六边形，高为 $2\sqrt{6}$. 设 M 是线段 EF 的中点，求三角形 MGI 的面积.



① $14\sqrt{3}$　② $\dfrac{29\sqrt{3}}{2}$　③ $15\sqrt{3}$　④ $\dfrac{31\sqrt{3}}{2}$　⑤ $16\sqrt{3}$

答案　①，$14\sqrt{3}$.

解答　从 M 向底面作正投影，投影点 N 是 KL 的中点. 先求 N 到 GI 的平面距离，再与棱柱的高度合成三角形的高.

在底面建立直角坐标系，以正六边形中心为原点，取 $G=(4,0)$、$I=(-2,2\sqrt{3})$、$K=(-2,-2\sqrt{3})$、$L=(2,-2\sqrt{3})$，故 $N=(0,-2\sqrt{3})$. 于是 $GI=4\sqrt{3}$，直线 GI 的方程为 $x+\sqrt{3}y=4$，N 到它的距离为 $\dfrac{|0-6-4|}{\sqrt{1+3}}=5$.

M 到 GI 的垂线长为 $\sqrt{5^2+(2\sqrt{6})^2}=7$，因此面积为 $\frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{3}\cdot 7=14\sqrt{3}$.

第 28 题 | 4 分

坐标平面内有直角三角形 OAB，其中 $OA=2\sqrt{2}$、$OB=AB=2$. 点 P 在线段 OA 上运动，点 Q 在线段 OB 上运动，点 R 满足下列条件.

(甲) $2\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}$.

(乙) $2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BR}-\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{AR}\geq 16$.

设 $\overrightarrow{OR}\cdot\overrightarrow{BR}$ 的最大值、最小值分别为 M,m，求 $M+m$.

① $\dfrac{193}{5}$　② $\dfrac{194}{5}$　③ 39　④ $\dfrac{196}{5}$　⑤ $\dfrac{197}{5}$

答案　④，$\dfrac{196}{5}$.

解答 取 $O=(0,0)$、$B=(2,0)$、$A=(2,2)$. 设 $P=(2t,2t)$、$Q=(2s,0)$，其中 $0\le t,s\le 1$. 若 $R=(x,y)$，由（甲），$R=(4t-2s,4t)$，等价于 $0\le y\le 4$、$y-2\le x\le y$.（乙）化为 $x+2y\ge 10$.

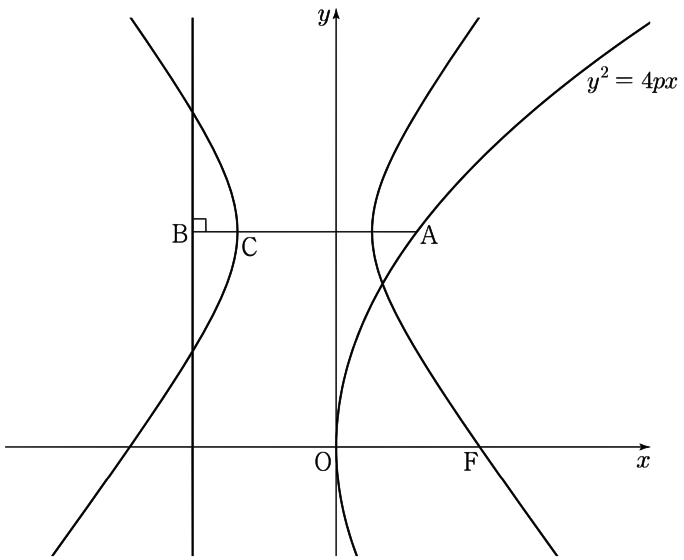
目标量可写成 $(x-1)^2+y^2-1$，只需比较 R 到 $(1,0)$ 的距离. 由 $y\le 4$、$x+2y\ge 10$ 得 $x\ge 2$，并且 $x\le y\le 4$，故目标量至多为 $3^2+4^2-1=24$，在 $(4,4)$ 处取到.

可行半平面 $x+2y\ge 10$ 中，离 $(1,0)$ 最近的是垂足 $(\frac{14}{5},\frac{18}{5})$，它满足 $0\le y\le 4$、$y-2\le x\le y$. 到边界的距离平方为 $(10-1)^2/5=81/5$，故 $m=81/5-1=76/5$，所求为 $24+76/5=196/5$.

第 29 题 | 4 分

抛物线 $y^2=4px$（$p>0$）的焦点为 F. 设 A 是该抛物线上位于第一象限的一点，从 A 向抛物线的准线作垂线，垂足为 B. 考虑以 A,B 为两焦点、经过点 F 的双曲线. 在该双曲线两个顶点中，记靠近 B 的一个为 C，并记斜率为正的渐近线为 ℓ.

若 $8BC=BF$，且点 F 到直线 ℓ 的距离为 15，求三角形 ABF 的周长. 已知 $AF<2p$.



答案 45.

解答 设 $A=(u,v)$，则 $B=(-p,v)$、$F=(p,0)$，其中 $u,v>0$ 且 $v^2=4pu$. 由抛物线定义，令 $L=AB=AF=u+p$. 记 $D=BF$，则 $D>2p>L$，故双曲线的实半轴长为 $(D-L)/2$，半焦距为 $L/2$. 于是

$$BC=L-\frac{D}{2},\qquad 8\left(L-\frac{D}{2}\right)=D,$$

得 $D=8L/5$. 实半轴、虚半轴长分别为 $3L/10$、$2L/5$，故所给渐近线的斜率为 $4/3$.

由 $D^2=4p^2+v^2=4pL$，得 $p=16L/25$、$u=9L/25$、$v=24L/25$. 双曲线中心为 AB 的中点 $(-7L/50,24L/25)$. 故点 F 到正斜率渐近线的距离为

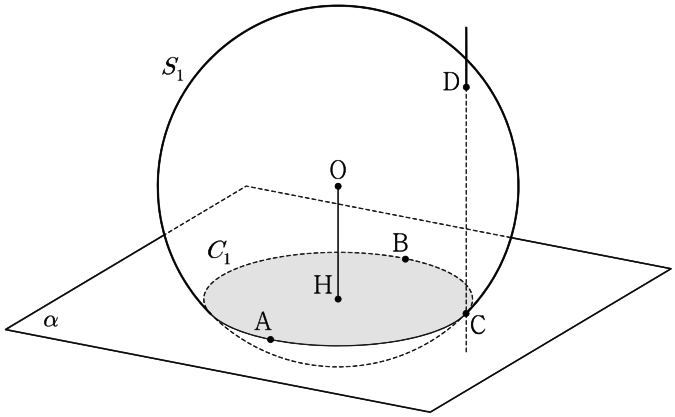
$$\frac{4\cdot\frac{39L}{50}+3\cdot\frac{24L}{25}}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{6L}{5}.$$

由 $\dfrac{6L}{5}=15$ 得 $L=\dfrac{25}{2}$，所求周长为 $2L+D=\dfrac{18L}{5}=45$.

第 30 题 | 4 分

在空间直角坐标系中，球面 S_1 的球心为 O，半径为 $3\sqrt{5}$. 设 $OH=2\sqrt{5}$，过 H 且垂直于直线 OH 的平面 α 与 S_1 相交成圆 C_1. 在 C_1 上取三个不同的点 A,B,C，使得 $AB=10$、$BC=2\sqrt{10}$.

过 C 且垂直于平面 α 的直线与球面 S_1 的另一个交点为 D. 设球面 S_2 的球心为 D，且与平面 OAB 相切. 两个球面 S_1,S_2 相交成圆 C_2. 若 C_2 在平面 α 上正射影所围成的面积为 $\dfrac{q}{p}\pi$（p,q 为互质的正整数），求 $p+q$.



答案 223.

解答 取 O 为原点、α 为平面 $z=-2\sqrt{5}$. C_1 的半径为 $\sqrt{45-20}=5$，故 $AB=10$ 是直径. 可取 $A=(-5,0,-2\sqrt{5})$、$B=(5,0,-2\sqrt{5})$，于是平面 OAB 为 $y=0$. 设 $C=(x,y,-2\sqrt{5})$，由

$$x^2+y^2=25,\qquad (x-5)^2+y^2=40$$

得 $x=1$、$y^2=24$. 球面关于 $z=0$ 对称，因此 $D=(1,y,2\sqrt{5})$，且 S_2 的半径为 D 到平面 $y=0$ 的距离，即 $\sqrt{24}$.

若 $\mathbf{X}$ 是交圆上一点的位置向量，$\mathbf{D}=\overrightarrow{OD}$，则 $|\mathbf{X}|^2=45$、$|\mathbf{X}-\mathbf{D}|^2=24$. 两式相减得 $\mathbf{D}\cdot\mathbf{X}=33$. 交圆平面到 O 的距离为 $33/\sqrt{45}$，交圆半径平方为 $45-33^2/45=104/5$.

正射影的面积缩放率为两平面单位法向量点积的绝对值，即 $|2\sqrt{5}|/\sqrt{45}=2/3$. 所以正射影面积为 $\dfrac{208}{15}\pi$，所求为 $15+208=223$.