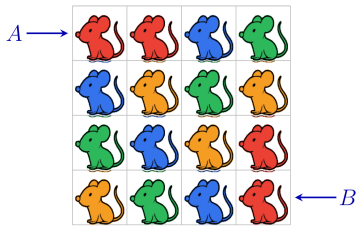
2026 年 USEMO 西区试题

第一天（2026 年 10 月 24 日）

第 1 题

在国际老鼠奥林匹克竞赛中，2026 支队伍各有 2026 只老鼠，它们要入住一个 2026×2026 的方格表，每格一只. 为减少同队成员之间的合作，组织者希望使“队伍距离”尽可能大：对所有由同队两只老鼠组成的无序对，求两者的曼哈顿距离，再将这些距离相加. 队伍距离的最大可能值是多少?

注：若两只老鼠分别占据方格 (r_1, c_1) 和 (r_2, c_2)，则它们的曼哈顿距离为 $|r_1 - r_2| + |c_1 - c_2|$.



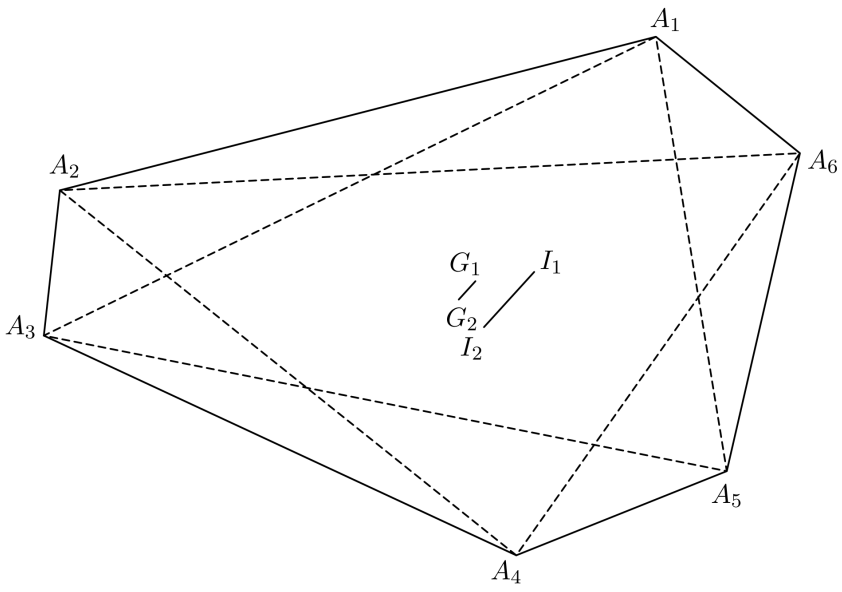
在这个 4×4 示例中，每种颜色代表一支由 4 只老鼠组成的队伍. 红色老鼠 A、B 对队伍距离的贡献为 $|1 - 4| + |1 - 4| = 6$. 对所有同色老鼠的无序对求和，得到 $22 + 17 + 20 + 17 = 76$.

第 2 题

设 $\mathbb{N}$ 为正整数集. 求所有函数 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, 使得对任意 $n, m \in \mathbb{N}$, 均有 $f^{f(n)+m}(n) = n + f(n+m)$. 这里，$f^k(n)$ 表示将函数 f 对 n 连续迭代 k 次所得的值.

第 3 题

设 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ 为凸六边形，且对所有 $1 \le i \le 6$，点 A_i 到直线 $A_{i-1}A_{i+1}$ 的距离均相等，其中下标按模 6 计算. 对每个 $k \in \{1, 2\}$，分别以 I_k、G_k 表示三角形 $A_kA_{k+2}A_{k+4}$ 的内心和重心. 已知 $I_1 \neq I_2$ 且 $G_1 \neq G_2$. 证明：直线 I_1I_2 与 G_1G_2 平行或重合.



第二天（2026 年 10 月 25 日）

第 4 题

是否存在一个由正整数组成的等比数列 $a_1, a_2, \ldots, a_{2026}$，使它们的数位和 $S(a_1), S(a_2), \ldots, S(a_{2026})$ 构成公差非零的等差数列？这里，$S(x)$ 表示 x 的十进制表示中各位数字之和.

第 5 题

设 $P = P_1P_2\cdots P_{2026}$ 和 $Q = Q_1Q_2\cdots Q_{2026}$ 为凸多边形，且 Q 的每个顶点都严格位于 P 的内部. 已知对所有 $1 \le i \le 2026$，均有 $Q_iQ_{i+1} \parallel P_iP_{i+1}$，其中下标按模 2026 计算. 满足 $Q_iQ_{i+1} > P_iP_{i+1}$ 的下标 $1 \le i \le 2026$ 最多有多少个？

第 6 题

固定一个大于 2026 的奇数 k. 游戏（Yugi）有一副《游戏王》卡组，其中共有奇数 n 张牌，每张牌都属于怪兽卡或陷阱卡中的一种. 每次操作，他选择 k 张互不相同的牌，借助“千年积木”（Millennium Puzzle）判断这 k 张牌中哪一类更多. 后续操作可以再次选取此前选过的牌，且每次选牌可以根据此前操作的回答来决定. 证明：对所有充分大的奇数 n，他都能用少于 $n/100$ 次操作，确定整副卡组中哪一类牌更多.

注：若将 $1/100$ 换成更大的常数 $c_k < 1$（可依赖于 k），所得结果可根据 c_k 的值获得部分分数.

题文来源：西区第一天原卷、西区第二天原卷. Mathelots 主办，Anant Mudgal 负责.