

一道 CMO 模拟中复数不等式的奇妙做法

2026-10-22 [原文链接](#)

网站版本 8d7d784393a3 · 文章 ID h_3cc4ae22fab781aa

题目 (爱尖子 CMO 模拟)

给定正整数 n . 设 $a_1, \dots, a_{3n}$ 为非负实数, $z_1, \dots, z_{3n}$ 为单位复数, 满足 $\sum_{i=1}^{3n} z_i = 0$, 且对任意 $j, k \in \{1, \dots, 3n\}$, 均有

$$a_j + a_k \leq |z_j + z_k|.$$

求 $\sum_{i=1}^{3n} a_i$ 的最大值, 并确定取等情形.

解答 (PDF 中已展开)

解答

最大值为 $\boxed{3n/2}$. 等号成立当且仅当 $a_1 = \dots = a_{3n} = \frac{1}{2}$, 且 $z_1, \dots, z_{3n}$ 恰由某个单位圆内接正三角形的三个顶点各重复 n 次组成. 此时 $\sum z_i = 0$, 任意 $|z_j + z_k|$ 为 1 或 2, 满足题设.

设 $\sum a_i \geq 3n/2$. 将复数视为平面向量, 记 $u \cdot z = \Re(u\bar{z})$, 令

$$G_i = \left\{ u : u \cdot z_i > a_i - \frac{1}{2} \right\}.$$

若这些开半平面有公共点 u , 则

$$0 = u \cdot \sum_{i=1}^{3n} z_i > \sum_{i=1}^{3n} a_i - \frac{3n}{2} \geq 0,$$

矛盾. 由平面 Helly 定理, 不妨设

$$G_1 \cap G_2 \cap G_3 = \emptyset. \quad (1)$$

若 z_1, z_2, z_3 同处一个开半圆内, 则存在向量 v , 使 $v \cdot z_i > 0$ ($i = 1, 2, 3$). 取充分大的正数 M , 即有 $Mv \in G_1 \cap G_2 \cap G_3$, 与 (1) 矛盾.

若其中两点互为相反数, 不妨设 $z_2 = -z_1$, 则 $a_1 = a_2 = 0$, 故直线 $L : u \cdot z_1 = 0$ 包含于 $G_1 \cap G_2$. 若 z_3 不平行于 z_1 , 则 $u \cdot z_3$ 在 L 上可取任意实数, 故 $L \cap G_3 \neq \emptyset$; 否则 $z_3 = \pm z_1$, 又有 $a_3 = 0$, 原点即为三个半平面的公共点, 仍与 (1) 矛盾.

因此三点互不相同, 且按圆周顺序分出的三段弧均小于半圆, 故原点 O 位于三角形 $z_1 z_2 z_3$ 内部. 令

$$p_1 = \frac{[Oz_2 z_3]}{[z_1 z_2 z_3]}, \quad p_2 = \frac{[Oz_3 z_1]}{[z_1 z_2 z_3]}, \quad p_3 = \frac{[Oz_1 z_2]}{[z_1 z_2 z_3]},$$

其中方括号表示三角形面积, 则

$$p_i > 0, \quad p_1 + p_2 + p_3 = 1, \quad p_1 z_1 + p_2 z_2 + p_3 z_3 = 0.$$

三点不共线，故存在向量 u 和实数 c ，满足

$$a_i = c + u \cdot z_i \quad (i = 1, 2, 3).$$

若 $c < \frac{1}{2}$ ，则 $u \in G_1 \cap G_2 \cap G_3$ ，与 (1) 矛盾。因此

$$p_1 a_1 + p_2 a_2 + p_3 a_3 = c \geq \frac{1}{2}.$$

设三角形 $z_1 z_2 z_3$ 在三个顶点处的内角分别为 A, B, C ，记

$$T = \tan A + \tan B + \tan C.$$

原点是该三角形的外心且位于内部，故 A, B, C 均为锐角，且

$$\begin{aligned} |z_2 + z_3| &= 2 \cos A, \\ p_1 &= \frac{\sin 2A}{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C} = \frac{\tan B + \tan C}{2T}, \end{aligned}$$

其余两式类似。又

$$\begin{aligned} \sin A + \sin B + \sin C &\leq \frac{3\sqrt{3}}{2}, \\ \tan A + \tan B + \tan C &\geq 3\sqrt{3}, \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} 1 &\leq 2(p_1 a_1 + p_2 a_2 + p_3 a_3) \\ &= \frac{(a_2 + a_3) \tan A + (a_3 + a_1) \tan B + (a_1 + a_2) \tan C}{T} \\ &\leq \frac{2(\sin A + \sin B + \sin C)}{\tan A + \tan B + \tan C} \\ &\leq 1. \end{aligned}$$

因此各步均取等，得 $A = B = C = \pi/3$ ，且

$$a_1 + a_2 = a_2 + a_3 = a_3 + a_1 = 1.$$

于是 z_1, z_2, z_3 构成正三角形， $a_1 = a_2 = a_3 = \frac{1}{2}$ 。

对单位圆上任一点 z ，三个顶点中至少有一个与 $-z$ 的夹角不超过 $\pi/3$ ，故

$$\min_{1 \leq i \leq 3} |z + z_i| \leq 1.$$

等号成立当且仅当 $-z$ 是三段等分弧的中点之一，即 $z \in \{z_1, z_2, z_3\}$ 。因此，对每个 k ，

$$a_k + \frac{1}{2} \leq \min_{1 \leq i \leq 3} |z_k + z_i| \leq 1.$$

结合 $\sum a_k \geq 3n/2$ ，得所有 $a_k = \frac{1}{2}$ ，且所有 z_k 均为这三个顶点之一。

将三个顶点记为 $\zeta, \zeta\omega, \zeta\omega^2$ ，其中 $|\zeta| = 1$ ， $\omega = e^{2\pi i/3}$ ，出现次数分别为 r, s, t 。由 $\sum z_k = 0$ ，

$$r + s\omega + t\omega^2 = 0.$$

比较虚部、实部，得 $r = s = t$ ，再由 $r + s + t = 3n$ ，得 $r = s = t = n$ 。

综上， $\sum a_i \geq 3n/2$ 时必有 $\sum a_i = 3n/2$ ，且只能出现上述取等情况，故所求最大值为 $\boxed{3n/2}$ ，取等情形如前所述。

注

常规做法需要注意到如下恒等式：

$$\sum_{i=1}^{3n} \sum_{j=1}^{3n} |z_i - z_j|^2 (a_i + a_j) = 12n \sum_{i=1}^{3n} a_i$$