2027 年波兰数学奥林匹克第一轮

2026-11-08　原文链接

第 78 届波兰数学奥林匹克，2026—2027 学年．本部分考试于 2026 年 11 月 6 日举行，共 5 题，考试时间为 240 分钟．

第 1 题

设 $n \geq 6$ 为整数，k, ℓ 为满足

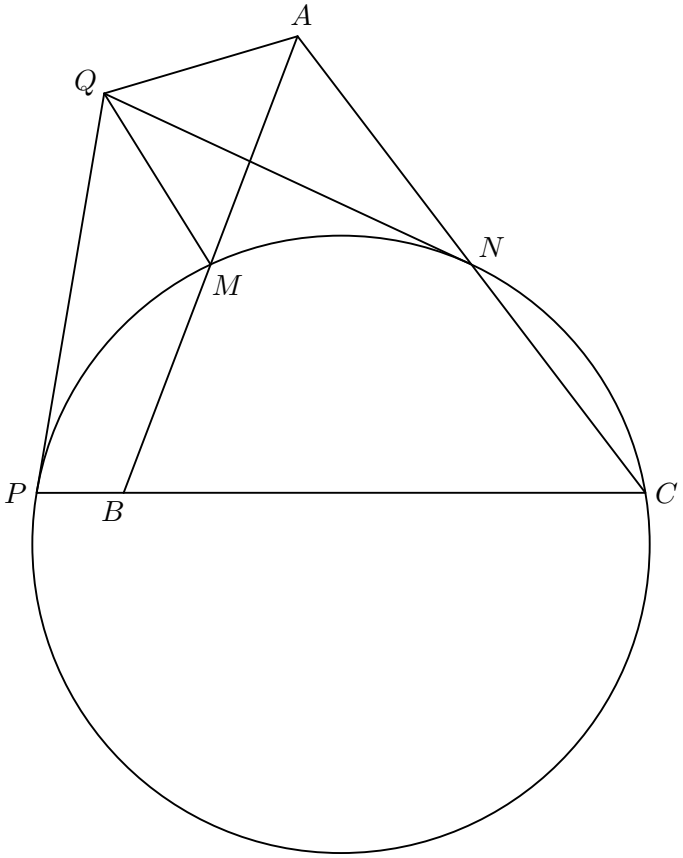
$$n \leq k < \ell \leq n + \sqrt{n}$$

的两个合数．证明：k 与 ℓ 的最大真因数不同．

注：正整数的真因数是指小于该数本身的正因数．

第 2 题

在三角形 ABC 中，$AB < AC$．点 M, N 分别为线段 AB, AC 的中点．设 Ω 为三角形 CMN 的外接圆，Ω 与直线 BC 的另一个交点为 P，其中 $P \neq C$．过 P, N 两点的 Ω 的切线相交于点 Q．证明：$AQ = QM$．



第 3 题

设 x 为非零实数，且 $x+\dfrac{1}{x}$ 为整数．证明：对任意整系数多项式 W，数

$$W(x)\cdot W\left(\frac{1}{x}\right)$$

都是整数.

第 4 题

彼得在一块 $m\times n$ 的棋盘上放置 1×2 的骨牌．每块骨牌恰好覆盖棋盘上的两个单位方格，任意两块骨牌不重叠，且骨牌不超出棋盘边界．骨牌可以横放，也可以竖放.

(1) 设 $m=n=100$．若由不同骨牌覆盖的任意两个方格不能共边，但可以共有顶点，求最多能放置多少块骨牌.

(2) 设 $m=99$，$n=101$．若由不同骨牌覆盖的任意两个方格既不能共边，也不能共有顶点，求最多能放置多少块骨牌.

第 5 题

设 $n\geq 2$ 为整数，$p_1,p_2,\ldots,p_n$ 为两两不同的素数．将

$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\cdots+\frac{1}{p_n}$$

写成最简分数 $\dfrac{a}{b}$，其中 a,b 为正整数．证明：

$$a^n\geq n^n b^{n-1}$$