2026 年 11 月谜之竞赛第 2 题

题目

设复数 $a_1, a_2, \cdots, a_{100}$ 满足 $a_1a_2\cdots a_{100}=1$，求 $S=\sum\limits_{1\le i<j\le 100}|a_i+a_j-4|$ 的最小可能值.（王羿骁、刘亦乐供题）

解答

设 $r_i=|a_i|$，不妨设 $0<r_1\le r_2\le\cdots\le r_{100}$，则 $r_1=\dfrac{1}{r_2\cdots r_{100}}\le r_2^{-99}$.

（1）$r_2\le 2$ 时，

$$\begin{aligned}S&\ge\sum_{k=3}^{100}(|a_1+a_k-4|+|a_2+a_{k+1}-4|+|a_k+a_{k+1}-4|)+|a_1+a_2-4|\\&\ge 98(4-r_1-r_2)+(4-r_1-r_2)\\&=99(4-r_1-r_2).\end{aligned}$$

（约定 $a_{101}=a_3$）

若 $r_2<1$，则 $r_1+r_2<2$，$S>198$.

若 $1\le r_2\le 2$，则

$$r_1+r_2\le r_2^{-99}+r_2\le\max\{1^{-99}+1,2^{-99}+2\}=2^{-99}+2$$

$S\ge 99(2-2^{-99})$.

（2）$r_2>2$ 时，

$$\begin{aligned}S&\ge\sum_{k=3}^{100}(|a_1+a_k-4|+|a_2+a_k-4|)+|a_1+a_2-4|\\&\ge 98(r_2-r_1)+(4-r_1-r_2)\\&=97r_2-99r_1+4\\&>99(2-2^{-99}).\end{aligned}$$

取等：$a_1=2^{-99}$，$a_2=\cdots=a_{100}=2$. 故最小值为 $99(2-2^{-99})$.