2026 HMMT November 题目与官方解析

2026-11-11　原文链接

2026 年 HMMT November 于 2026 年 11 月 7 日举行. 本篇收录 General、Theme、Team、Guts 四轮全部 66 题及官方解答的中文译文. 原解中经核实的笔误在相应位置以译注明示.

题目 · General（综合轮）

第 1 题 · GEN

下图的 1×8 方格表中，每个格子都填入一个一位正整数，且任意两个相邻格子中的数之差的绝对值为 3 或 5. 求八个数的和.

6	?	8	?	?	7	?	5

解析.

答案. 38

命题：Jason Mao.

把空格依次记为 a,b,c,d，如下图所示.

6	a	8	b	c	7	d	5

因为 a 与 8 相差 3 或 5，所以 a 只能是 3 或 5. 又因为 a 与 6 也相差 3 或 5，故 $a=3$.

同理，因为 d 与 7 相差 3 或 5，所以 d 只能是 2 或 4；再结合它与 5 也相差 3 或 5，可得 $d=2$.

最后，同样可知 b 只能是 3 或 5，而 c 只能是 2 或 4. 因为 b,c 也必须相差 3 或 5，所以 $b=5,c=2$. 填满后得到下图.

6	3	8	5	2	7	2	5

将八个数相加，得到 38.

第 2 题 · GEN

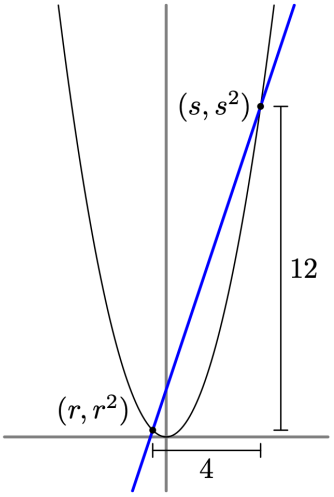
设 m,b 为正实数，直线 $y=mx+b$ 与抛物线 $y=x^2$ 相交于两点，这两点的横坐标相差 4，纵坐标相差 12. 求 b.

解析.

答案. $\dfrac{7}{4}$

命题：Jackson Dryg.

解法一　设两个交点为 (r,r^2) 和 (s,s^2).



原解说明：必要时可将抛物线和直线关于 y 轴反射，这不改变 b，因而不妨设 $r>0$ 且 $|r|>|s|$. 于是题设给出

$$r-s=4,\qquad r^2-s^2=12.$$

注意到 $r^2-s^2=(r-s)(r+s)$，所以

$$r+s=\frac{r^2-s^2}{r-s}=\frac{12}{4}=3.$$

与 $r-s=4$ 相加，得 $2r=7$，故 $r=\dfrac{7}{2}$. 代回 $r-s=4$，得 $s=-\dfrac{1}{2}$.

又因为直线经过 (r,r^2) 与 (s,s^2)，其斜率为 $m=\dfrac{r^2-s^2}{r-s}=3$，故直线方程为 $y=3x+b$. 将 $(s,s^2)=(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4})$ 代入，得到

$$\frac{1}{4}=3\left(-\frac{1}{2}\right)+b\quad\Longrightarrow\quad b=\frac{1}{4}-3\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{4}.$$

解法二　求出 r,s 后，还可更快地结束计算. 它们是方程 $x^2-mx-b=0$ 的两根，由韦达定理，

$$b=-rs=-\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{7}{2}\right)=\frac{7}{4}.$$

核校注　原图将左下交点标为 (r,r^2)、右上交点标为 (s,s^2)，与正文的命名相反. 原图予以保留，以正文的 $r=\dfrac{7}{2},s=-\dfrac{1}{2}$ 为准. 题设已有 $m>0$，只需把右侧交点命名为 r，无须反射；原解所说的反射会改变斜率的正负，但不影响所求截距.

第 3 题 · GEN

猴子 Eric 一开始没有香蕉. 每天早晨，Eric 可以选择去超市买一把恰好有 5 根的香蕉，每天至多买一把. Eric 至多只能去超市 3 次. 每天晚上，Eric 必须吃掉 1 根香蕉，否则就会死去. 求 Eric 能够存活 15 个晚上的购香蕉方案数.

解析.

答案. 35

命题：Jason Mao.

Eric 能够度过全部 15 个晚上，当且仅当以下条件同时满足：

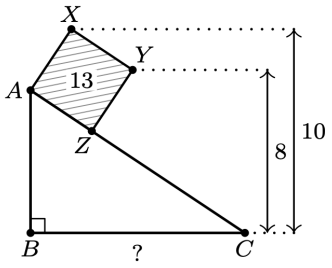
- Eric 在第 1 天去超市，这样第一晚才有香蕉吃.
- 到第 6 天晚上之前，Eric 至少去过两次超市，因为一次只能买到 5 根香蕉.
- 到第 11 天晚上之前，Eric 去过三次超市，因为两次只能买到 10 根香蕉.

这些条件满足时，前 15 个晚上每晚都有香蕉可吃. 因此，除第一天的采购外，Eric 要在第 2 天至第 11 天（含两端）再去超市两次. 在这 10 天中选两天，有 $\binom{10}{2}$ 种方案. 但是，这两次不能都在第 7 天至第 11 天，因为第二次必须不晚于第 6 天；这排除了 $\binom{5}{2}$ 种方案. 所以答案为

$$\binom{10}{2}-\binom{5}{2}=35.$$

第 4 题 · GEN

如图，面积为 13 的正方形 $AXYZ$ 沿直角三角形 ABC 的斜边 AC 放置. 已知 X,Y 到直线 BC 的距离分别为 $10,8$，求 BC.

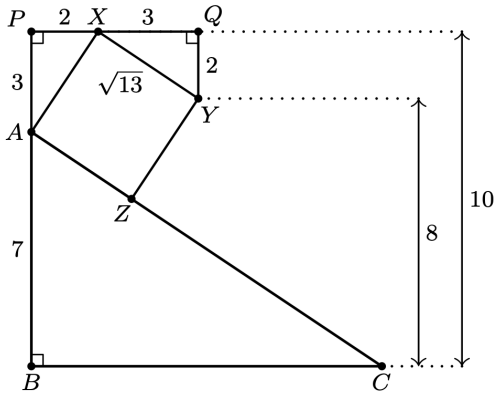


解析.

答案. $\dfrac{21}{2}$

命题：Jason Mao、Pitchayut Saengrungkongka.

按下图作点 P,Q，使 $\angle XPA$ 和 $\angle YQX$ 均为直角，且 P,A,B 共线，P,X,Q 共线.



正方形的边长为 $\sqrt{13}$，且 $QY=10-8=2$. 由勾股定理，

$$QX=\sqrt{XY^2-QY^2}=\sqrt{13-4}=3.$$

由于 $\triangle XPA\cong\triangle YQX$，所以 $PX=2,PA=3$，从而 $AB=10-3=7$.

最后，$\triangle XPA\sim\triangle ABC$，故

$$BC=AP\cdot\frac{AB}{PX}=3\cdot\frac{7}{2}=\frac{21}{2}.$$

第 5 题 · GEN

设 α 是使 $\alpha+\sqrt{\dfrac{11}{12}}$ 和 $\alpha^3+\sqrt{\dfrac{11}{12}}$ 都为正有理数的唯一实数. 求 $\alpha^3+\sqrt{\dfrac{11}{12}}$.

解析.

答案. $\dfrac{25}{54}$

命题：Jason Mao.

令 $q=\alpha+\sqrt{\dfrac{11}{12}}$，则 q 是正有理数. 注意到

$$\begin{aligned}\alpha^3+\sqrt{\frac{11}{12}}&=\left(q-\sqrt{\frac{11}{12}}\right)^3+\sqrt{\frac{11}{12}}\\&=q^3-3q^2\sqrt{\frac{11}{12}}+3q\cdot\frac{11}{12}-\frac{11}{12}\sqrt{\frac{11}{12}}+\sqrt{\frac{11}{12}}\\&=\left(q^3+\frac{11}{4}q\right)+\left(-3q^2+\frac{1}{12}\right)\sqrt{\frac{11}{12}}.\end{aligned}$$

上式与 $q^3+\dfrac{11}{4}q$ 都是有理数，所以 $\left(-3q^2+\dfrac{1}{12}\right)\sqrt{\dfrac{11}{12}}$ 也必须是有理数. 因为根式是无理数，故 $-3q^2+\dfrac{1}{12}=0$. 再由 $q>0$，得到 $q=\dfrac{1}{6}$. 因此

$$\alpha^3+\sqrt{\frac{11}{12}}=q^3+\frac{11}{4}q=\left(\frac{1}{6}\right)^3+\frac{11}{4}\cdot\frac{1}{6}=\frac{25}{54}.$$

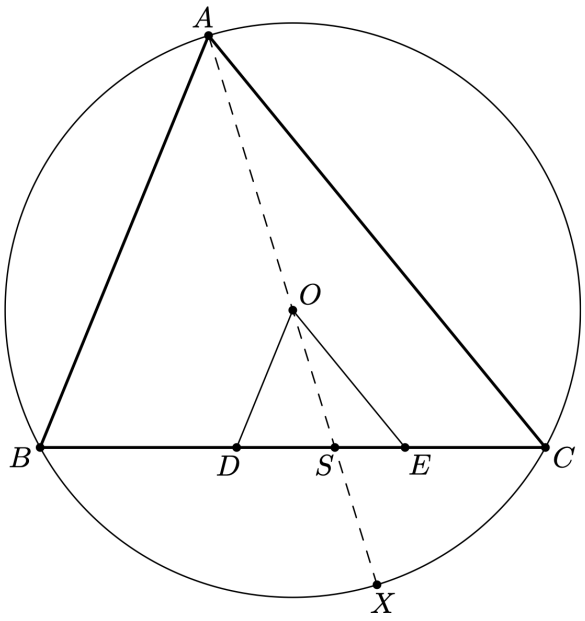
第 6 题 · GEN

设 O 为锐角三角形 ABC 的外心，D, E 为边 BC 上的点，满足 $OD \parallel AB$、$OE \parallel AC$. 已知 $BD = 7, DE = 6, EC = 5$，求 AO.

解析.

答案. $\sqrt{105}$

命题：Benny Wang.



设 $R = AO$ 为 $\triangle ABC$ 的外接圆半径. 设直线 AO 分别与 BC、外接圆交于 S、X，其中 $X \neq A$. 因为 $OD \parallel AB$ 且 $OE \parallel AC$，有

$$\triangle SOD \sim \triangle SAB, \qquad \triangle SOE \sim \triangle SAC.$$

因此

$$\frac{SD}{DB} = \frac{SO}{OA} = \frac{SE}{EC}, \qquad \frac{SD}{SE} = \frac{DB}{EC} = \frac{7}{5}.$$

结合 $SD + SE = 6$，得 $SD = \dfrac{7}{2}, SE = \dfrac{5}{2}$. 于是

$$\frac{SO}{R} = \frac{SO}{OA} = \frac{SD}{DB} = \frac{7/2}{7} = \frac{1}{2}, \qquad SO = \frac{R}{2}.$$

所以 $SX = OX - OS = R - \dfrac{R}{2} = \dfrac{R}{2}$. 由点 S 的幂，

$$SA \cdot SX = SB \cdot SC,$$
$$(OA + OS) \cdot SX = \left(\frac{7}{2} + 7\right)\left(\frac{5}{2} + 5\right),$$
$$\frac{3R}{2} \cdot \frac{R}{2} = \frac{21}{2} \cdot \frac{15}{2},$$
$$R^2 = 105.$$

所以 $R = \sqrt{105}$.

原文勘误 官方解答第 5 页写作 $SX = OX - SX$，此处应为 $SX = OX - OS$；上文已明确按正确线段关系写出，答案不变.

第 7 题 · GEN

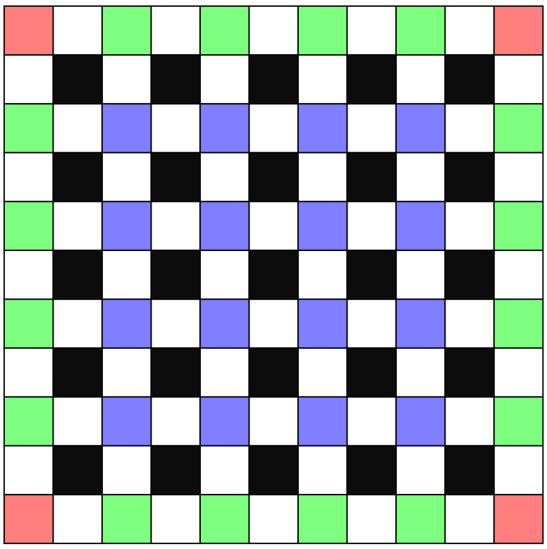
一个 11×11 的单位正方形方格表，其行、列依次编号为 1 至 11. 删去行号和列号均为偶数的所有格子. 求将剩余图形分割为边长都是整数的矩形的方案数.

解析.

答案. $3^4 \cdot 5^{16} \cdot 7^{16}$

命题：Benny Wang.

解法一（官方仅列此一解） 把行号、列号均为奇数的格子称为“关键格”. 将关键格按位于角上、边上和内部分类，如下图.

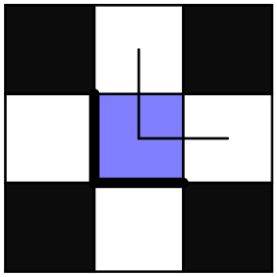


把剩余图形分割为矩形，等价于画出图形的某些内部格边，使这些格边将图形划成矩形. 对任一这样的选择，把划出的较小图形称为“区域”. 若下列条件至少有一条成立，就称一个关键格“满足条件”：

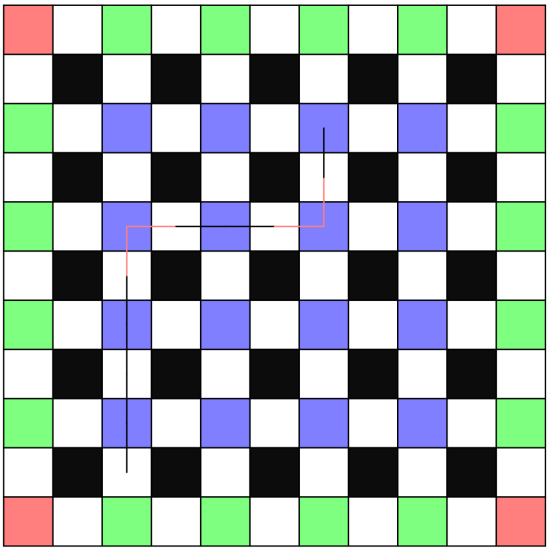
- 该格左右两侧存在的内部格边均已画出.
- 该格上下两侧存在的内部格边均已画出.

断言一 所选内部格边将图形分割为矩形，当且仅当每个关键格都满足条件.

证明 首先，如果某个关键格不满足条件，那么包含它的区域中会有一个由三个格子组成的 L 形. 包围这个 L 形的 2×2 方格中的第四格不属于该区域，所以该区域不可能是矩形.



现在假设每个关键格都满足条件. 先证明同一区域中的任意两个格子都在同一行或同一列. 同一区域中任意两格之间，都有一条穿过格子且不跨越已画格边的路径. 这条路径不能转弯：它只能在关键格处转弯，但每个关键格都满足条件，因而无法转弯.



接着证明一个区域的所有格子必定处于同一行或同一列. 若区域至多包含两个格子，则结论显然成立. 否则，从中取两个不同的格子 A,B，不妨设它们在同一行. 任一其他格子 C 不可能同时与 A,B 同列，故它至少与其中一格同行，从而与两格均同行. 因此该区域所有格子都在同一行，组成一个水平矩形. 若 A,B 同列，则同样得到竖直矩形. 断言得证.

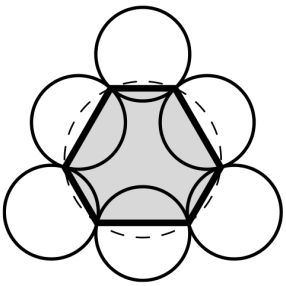
由容斥原理，若一个关键格邻接 a 条竖直内部格边和 b 条水平内部格边，则使该格满足条件的格边选择数恰为 2^a+2^b-1. 每条内部格边恰好属于一个关键格，所以只需将各关键格的选择数相乘.

- 4 个角上关键格，各有 $2^1+2^1-1=3$ 种选择.
- $4\cdot 4=16$ 个边上非角关键格，各有 $2^2+2^1-1=5$ 种选择.
- $4\cdot 4=16$ 个内部关键格，各有 $2^2+2^2-1=7$ 种选择.

因此答案是 $3^4\cdot 5^{16}\cdot 7^{16}$.

第 8 题 · GEN

如图，六个半径为 3 的圆按图示方式排列，每个圆都与另两个圆相切. 这些切点构成一个圆内接六边形的六个顶点，其外接圆半径为 5. 求这个六边形的面积.



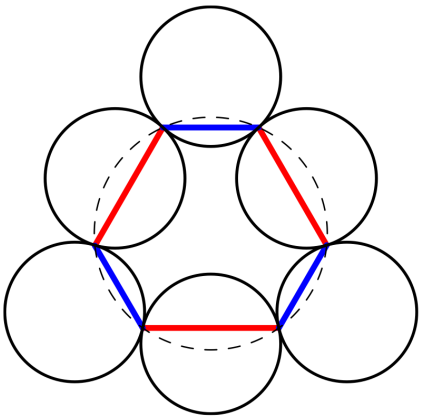
解析.

答案. $\dfrac{147\sqrt{3}}{4}$

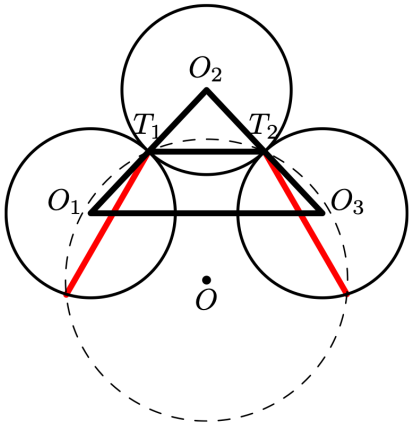
命题：Jason Mao.

依次将六个圆的圆心记为 $O_1, O_2, \ldots, O_6$，相邻圆的切点依次记为 $T_1, T_2, \ldots, T_6$，其中圆心为 O_i, O_{i+1} 的两圆相切于 T_i，并约定 $O_7 = O_1$. 设过这六个切点的圆的圆心为 O. 先作如下观察.

断言一 下图中的三条红色线段等长，三条蓝色线段也等长.



证明 只考虑下图所示部分.



因为 $O_1O_2 = O_2O_3 = 2 \cdot 3 = 6$，所以 $\triangle O_1O_2O_3$ 为等腰三角形．又因为各圆半径相同，T_1, T_2 分别是 O_1O_2, O_2O_3 的中点，故 $O_1T_1T_2O_3$ 是等腰梯形．因此 T_1T_2 与 O_1O_3 的垂直平分线重合．由 $OT_1 = OT_2$ 可得 $OO_1 = OO_3$，从而图中相应红边等长．用同样的推理，三条红边彼此等长，三条蓝边也彼此等长．

核校补充　此处“从而”的依据是：红边分别是大圆与以 O_1, O_3 为圆心的等半径小圆的公共弦．两对圆的半径和圆心距均相同，故公共弦长相同．

断言二　六边形 $T_1T_2T_3T_4T_5T_6$ 等角，且每个内角都是 120°．

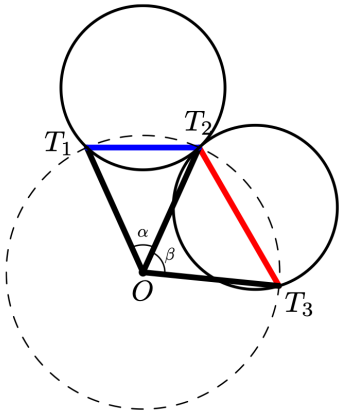
证明　由断言一，可令

$$\alpha = \angle T_1OT_2 = \angle T_3OT_4 = \angle T_5OT_6, \qquad \beta = \angle T_2OT_3 = \angle T_4OT_5 = \angle T_6OT_1.$$

于是

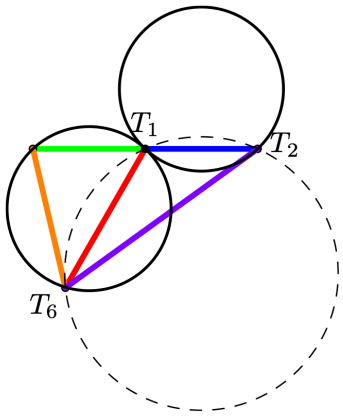
$$\angle T_1T_2T_3 = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle T_1OT_3 = 180^\circ - \frac{1}{2}(\alpha + \beta),$$

如图所示．



同理，六边形的每个内角都等于 $180^\circ - \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$，所以它等角．六边形内角和为 720°，故每个角为 $720^\circ/6 = 120^\circ$．

设每条红边长为 a，每条蓝边长为 b．按下图延长一条蓝边．



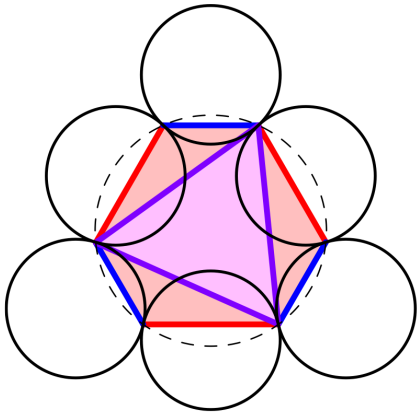
两个实线圆全等，蓝色线段与绿色线段关于 T_1 中心对称，所以它们等长. 由断言二，$\angle T_6T_1T_2 = 120^\circ$. 因此橙色线段是在半径为 3 的圆中对应 120° 圆心角的弦，长为 $3\sqrt{3}$；紫色线段是在半径为 5 的圆中对应 120° 圆心角的弦，长为 $5\sqrt{3}$. 在红—绿—橙及红—蓝—紫两个三角形中用余弦定理，得

$$a^2 + b^2 + ab = (5\sqrt{3})^2 = 75, \qquad a^2 + b^2 - ab = (3\sqrt{3})^2 = 27.$$

两式相减，得 $2ab = 48$，所以 $ab = 24$. 于是红—蓝—紫三角形 $T_6T_1T_2$ 的面积为

$$\frac{1}{2}ab\sin 120^\circ = \frac{1}{2}\cdot 24\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}.$$

最后，六边形可以分成一个边长为 $5\sqrt{3}$ 的等边三角形，以及三个全等三角形 $\triangle T_6T_1T_2$、$\triangle T_2T_3T_4$、$\triangle T_4T_5T_6$，如下图.



因此六边形的总面积为

$$\frac{(5\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4} + 3\cdot 6\sqrt{3} = \frac{147\sqrt{3}}{4}.$$

第 9 题 · GEN

设 $a_1, a_2, \ldots$ 为正整数数列，满足 $a_1 = a_2 = \cdots = a_7 = 1$，且

$$a_n = a_{n-1} + 10a_{n-7} \qquad (n \geq 8).$$

求 a_{2026} 除以 10000 的余数.

解析.

答案. 2991

命题：Pitchayut Saengrungkongka.

我们对 n 归纳，证明

$$a_n = 1 + 10^1\binom{n-7}{1} + 10^2\binom{n-13}{2} + 10^3\binom{n-19}{3} + 10^4\binom{n-25}{4} + \cdots.$$

这里各二项式系数的上标成公差为 -6 的等差数列，并约定当 $a < b$ 时，$\binom{a}{b} = 0$.

归纳基础 当 $n \in \{1, 2, \ldots, 7\}$ 时，$n - 7 \le 0$，只有首项非零，所以 $a_n = 1$，结论成立.

归纳步骤 假设 a_{n-1}, a_{n-7} 都满足上述公式，则

$$a_{n-1} = 1 + 10^1\binom{n-8}{1} + 10^2\binom{n-14}{2} + 10^3\binom{n-20}{3} + 10^4\binom{n-26}{4} + \cdots,$$
$$10a_{n-7} = 10^1\binom{n-8}{0} + 10^2\binom{n-14}{1} + 10^3\binom{n-20}{2} + 10^4\binom{n-26}{3} + \cdots.$$

逐项使用帕斯卡恒等式相加，可得

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + 10a_{n-7} \\ &= 1 + 10^1\binom{n-7}{1} + 10^2\binom{n-13}{2} + 10^3\binom{n-19}{3} + 10^4\binom{n-25}{4} + \cdots. \end{aligned}$$

归纳完成，所以该公式对所有正整数 n 成立.

除前四项外，其余项均被 10000 整除，故只需计算

$$1 + 10(2026 - 7) + 10^2\binom{2026-13}{2} + 10^3\binom{2026-19}{3} \pmod{10^4}.$$

因为 $2013 \equiv 13 \pmod{200}$，故 $2013 \cdot 2012 \equiv 13 \cdot 12 \pmod{200}$，从而

$$\binom{2013}{2} \equiv \binom{13}{2} = 78 \pmod{100}.$$

同理，$2007 \equiv 7 \pmod{20}$，所以 $2007 \cdot 2006 \cdot 2005 \equiv 7 \cdot 6 \cdot 5 \pmod{20}$. 由于 3 在模 20 下可逆，先除以 3，仍得模 20 同余；再将两边除以 2，模数变为 10，得到

$$\binom{2007}{3} \equiv \binom{7}{3} = 35 \equiv 5 \pmod{10}.$$

因此所求余数为

$$1 + 190 + 7800 + 5000 \equiv 2991 \pmod{10000}.$$

第 10 题 · GEN

HMMTland 国有 100 座城市. 工程师计划在每一对城市之间修建一条隧道，并将互不相同的建设费用 $1, 2, \ldots, \binom{100}{2}$ 随机分配给这些拟建隧道，每一种分配等可能. 每座城市只资助与它相连的、费用最低的那条隧道. 一条隧道只要获得至少一座城市的资助就会建成；若获得不止一座城市资助，也只修建一次. 求最终隧道系统的连通分量数的期望.

（连通分量是城市的一个极大非空集合，其中任意一座城市都能沿已建隧道到达集合中的任意另一座城市.）

解析.

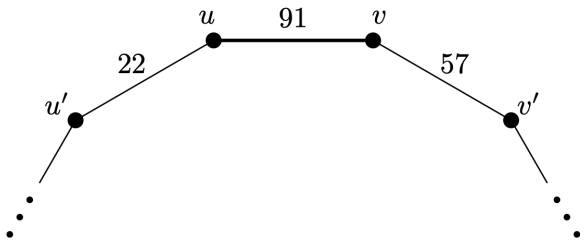
答案. $\dfrac{4950}{197}$

命题：Bryan Guo.

先对隧道系统作如下观察.

断言一 隧道系统不可能包含环，即它一定是一片由树组成的森林.

证明 反设系统包含一个环. 取这个环中最昂贵的隧道，设其连接城市 u, v. 再设 $u' \neq v$ 是环上 u 的另一邻城，$v' \neq u$ 是环上 v 的另一邻城.



城市 u 不会资助 uv，因为 uu' 的费用比它低. 同理，城市 v 也不会资助 uv. 因此 uv 无人资助，不会建成，与其在环上矛盾.

若一条隧道的两个端点城市都资助它，就称它为“双方资助隧道”. 设系统中这类隧道有 M 条. 每座城市资助一条隧道，而双方资助隧道各被重复计数一次，所以已建隧道数为 $100 - M$. 由于系统是一片森林，其连通分量数恰为 $100 - (100 - M) = M$. 所以只需计算 M 的期望.

断言二 对任意两座城市 u, v，它们之间的拟建隧道最终成为双方资助隧道的概率为 $\dfrac{1}{197}$.

证明 考虑所有与 u 或 v 中至少一座城市相连的拟建隧道. 仅与 u 相连的有 98 条，仅与 v 相连的有 98 条，同时与两者相连的有 1 条，总计 $98 + 98 + 1 = 197$ 条.

隧道 uv 成为双方资助隧道，当且仅当它在这 197 条中费用最低. 每条隧道等可能取得最低费用，所以所求概率为 $\dfrac{1}{197}$.

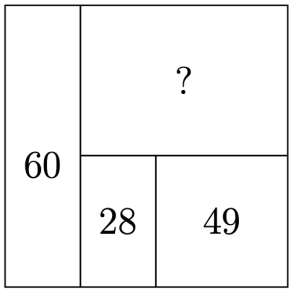
共有 $\binom{100}{2}$ 条拟建隧道，每条成为双方资助隧道的概率都是 $\dfrac{1}{197}$. 由期望的线性性，所求期望为

$$\mathbb{E}[M] = \binom{100}{2} \cdot \frac{1}{197} = \frac{4950}{197}.$$

题目 · Theme（主题轮）

第 1 题 · THM

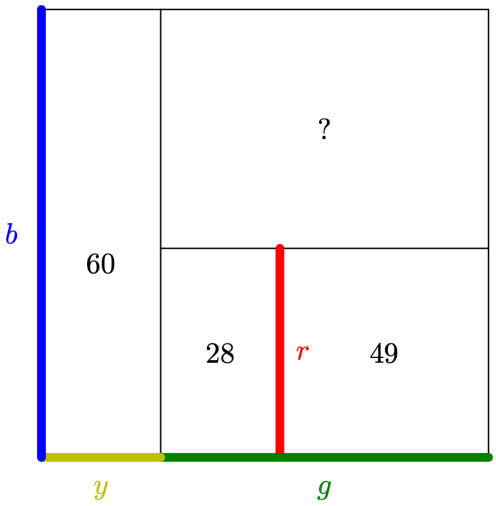
Moana 把四块长方形木板绑在一起，搭成一个正方形木筏. 所有木板的边长都是整数，其中三块的面积分别为 $60, 28, 49$，位置如图. 求第四块木板的面积.



解析.

答案. 88

命题：Jackson Dryg、Jason Mao.



把图中红、黄、绿、蓝线段的长度分别记为 r, y, g, b. 由底边为 g、高为 r 的长方形面积为 $28+49=77$，有 $rg=77$. 而且 r 必须同时整除 28 与 49，故 $r=1$ 或 $r=7$.

若 $r=1$，则绿线段长为 77，整个正方形的边长大于 77. 另一方面，该边长等于蓝线段长，是 60 的正整数因数，不超过 60，矛盾. 所以 $r=7, g=11$.

由左侧长方形可得 $by=60$. 整个木筏是正方形，所以 $b=y+g=y+11$，即 $y=b-11$. 因此

$$b(b-11)=60 \Longrightarrow b^2-11b-60=0 \Longrightarrow (b-15)(b+4)=0.$$

解得 $b=15$ 或 $b=-4$. 因为 $b>0$，所以 $b=15$.

第四块长方形的边长为 $g=11$ 和 $b-r=15-7=8$，面积为 $11\cdot 8=88$.

原文细节　原解由“正整数因数”写成 $b<60$，严格地说应为 $b\le 60$；这一修正不影响与 $b>77$ 的矛盾.

第 2 题 · THM

Ariel 正在整理她收集的人类宝物. 她的 dinglehopper 可以恰好分成每组 102 件，snarfblatt 可以恰好分成每组 103 件. 将这两类宝物合在一起，又可以恰好分成每组 100 件. 求 Ariel 收藏的这两类宝物的非零总件数的最小可能值.

解析.

答案.　3500

命题：Jackson Dryg.

设 Ariel 有 $102x$ 件 dinglehopper、$103y$ 件 snarfblatt，其中 x,y 为非负整数. 由总数可按每组 100 件分组，

$$102x+103y\equiv 0 \pmod{100} \Longrightarrow 2x+3y\equiv 0 \pmod{100}.$$

要使

$$102x+103y=100(x+y)+(2x+3y)$$

最小. 因为总数非零，所以 $2x+3y$ 是正的 100 的倍数，至少为 100. 又有

$$x+y=\frac{1}{2}\big((2x+3y)-y\big),$$

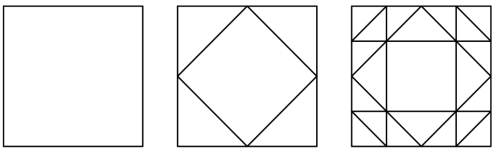
故在 $2x+3y$ 固定时，应使 y 尽可能大. 当 $2x+3y=100$ 时，y 至多为 32，从而得到 $(x,y)=(2,32)$. 代入可得总件数

$$100(x+y)+(2x+3y)=100(2+32)+100=3500.$$

核校补充　原解没有单独排除 $2x+3y\ge 200$ 的情况. 此时 $3(x+y)\ge 2x+3y\ge 200$，所以 $x+y\ge 67$，总数至少为 $100\cdot 67+200=6900>3500$. 故上面的最小值确为全局最小值.

第 3 题 · THM

Jasmine 正在为飞毯设计新图案. 她的第一稿是一个正方形. 要画第 $n+1$ 稿，她从第 n 稿出发，对图中由线段围成的每一个多边形区域，将其各对相邻边的中点用线段连接. 前三稿如图，分别包含 $1,5,21$ 个多边形区域. 求第 6 稿中的多边形区域数.



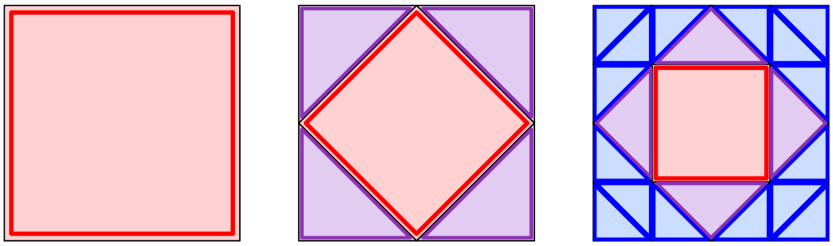
Draft 1　Draft 2　Draft 3

解析.

答案. 1365

命题：Kyle Wu.

注意第二稿可看成外侧的 4^1 个三角形，加上一个旋转后的第一稿副本．此后，对每个正整数 n，在构造第 $n+1$ 稿时，每个外侧三角形被分成四个三角形，而中央部分变成第 n 稿的副本.



Draft 1　　Draft 2　　Draft 3

第二稿有 $4 = 4^1$ 个外侧三角形，每增加一稿，外侧三角形数乘以 4．设第 n 稿的多边形区域数为 a_n，则 $a_{n+1} = a_n + 4^n$．由 $a_1 = 1$，可得

$$\begin{aligned} a_6 &= a_5 + 4^5 \\ &= a_4 + 4^4 + 4^5 \\ &= \cdots \\ &= a_1 + 4^1 + 4^2 + 4^3 + 4^4 + 4^5 \\ &= 4^0 + 4^1 + 4^2 + 4^3 + 4^4 + 4^5 \\ &= \frac{4^6 - 1}{3} = \frac{4095}{3} = 1365. \end{aligned}$$

第 4 题 · THM

经历最近的一些事情后，Snow White 决定重新开始吃苹果．她在第 1 天吃 1 个苹果．对每个正整数 $n \geq 2$，她在第 n 天吃的苹果数，是此前所有天吃的苹果总数的 n 倍．求她在第 2026 天吃的苹果数.

解析.

答案. $1013 \cdot 2026!$

命题：Derek Liu.

设 a_n 为 Snow White 在前 n 天吃的苹果总数．则

$$a_n = a_{n-1} + na_{n-1} = (n+1)a_{n-1},$$

所以

$$a_n = (n+1)n(n-1)\cdots 3a_1 = \frac{(n+1)!}{2}.$$

她在第 2026 天吃 $2026a_{2025}$ 个苹果，故答案为

$$2026 \cdot \frac{2026!}{2} = 1013 \cdot 2026!.$$

原文勘误 官方解答末行左侧印为 $2026 \cdot \dfrac{2027!}{2}$，其中阶乘应为 2026!. 其前文递推和框出的答案均正确.

第 5 题 · THM

Rapunzel 的头发又长得太长，于是她决定在接下来的 6 天里每天剪发. 第一天开始时，她的头发长 2026 英尺. 她先选定一个正整数 m. 然后在第 n 天，先剪去 $\dfrac{m}{n}$ 英尺，再剪去剩余头发长度的 $\dfrac{1}{n+1}$. 假设头发不会重新长出，且这 6 天每天结束时，头发长度都是整数英尺. 求 m 的最小可能值.

解析.

答案. 74

命题：Derek Liu.

我们断言，第 n 天结束后，Rapunzel 的头发长度为

$$\frac{2026+m}{n+1} - m.$$

对 n 作归纳证明.

归纳基础 $n = 0$ 时，无论 m 取何值，最初的长度都有

$$2026 = \frac{2026+m}{0+1} - m.$$

归纳步骤 假设第 $n-1$ 天结束后的长度为 $\dfrac{2026+m}{n} - m$. 则第 n 天结束后的长度为

$$\begin{aligned}\frac{n}{n+1}\left(\frac{2026+m}{n} - m - \frac{m}{n}\right) &= \frac{n}{n+1} \cdot \frac{2026-mn}{n} \\ &= \frac{2026+m}{n+1} - m.\end{aligned}$$

断言得证.

原解据此要求上述量在 $n = 1, 2, \ldots, 6$ 时都为整数. 因为 m 是整数，这等价于 $2026+m$ 被 2 至 7 中的每个整数整除. 这些数的最小公倍数为 $2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 420$，故 $420 \mid 2026+m$. 大于 2026 的最小 420 的倍数为 $2100 = 2026 + 74$，所以 $m \geq 74$.

可行性核校 取 $m = 74$ 时，六天结束后的长度依次为 $976, 626, 451, 346, 276, 226$ 英尺，均为正整数，而且每次剪去的长度不超过当时剩余长度. 因此下界可以达到，最小值确为 74. 原解把整数条件直接表述为“当且仅当可行”，没有单独检查头发长度非负；这里补全了所取最小值的可行性.

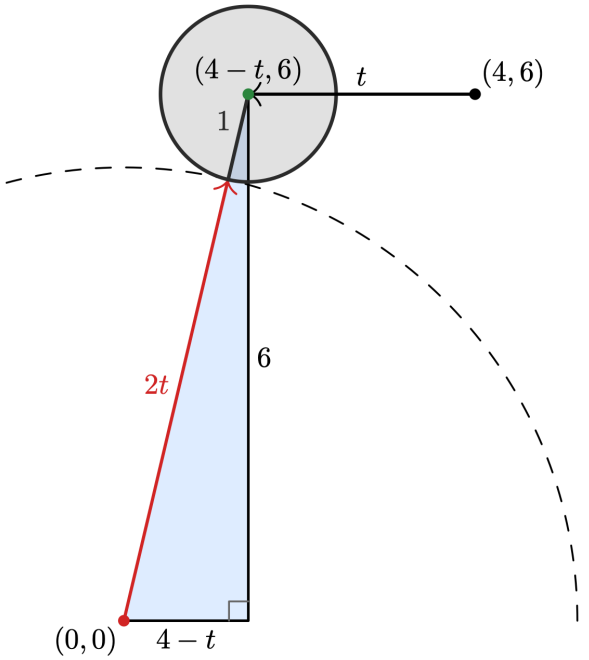
第 6 题 · THM

Raya 骑着龙 Sisu 在 Kumandra 上空飞行时，发现一座想要前往的小圆岛．起初，她们位于点 $(0,0)$ 的正上方．岛屿由所有满足 $(x-4)^2+(y-6)^2\le 1$ 的点 (x,y) 组成．无风时，Sisu 可以沿任意方向以每小时 2 个单位长度的速度飞行．此外，风沿 x 轴正方向以每小时 1 个单位长度的恒定速度推动 Sisu．求她们到达岛屿任一点正上方所需的最短时间，以小时为单位．（假设整个飞行过程中高度不变．）

解析.

答案. $\sqrt{21}-2$

命题：Darren Han、Liam Reddy.



可以把问题等价地改写为：去掉风，让岛屿沿 x 轴负方向以每小时 1 个单位长度的速度移动．在这个参考系中，t 小时后岛心位于 $(4-t,6)$，Raya 最多飞行 $2t$ 个单位长度．她到达岛屿，当且仅当与岛心相距不超过 1．因此能够到达岛屿，当且仅当 $(4-t,6)$ 与原点的距离不超过 $2t+1$，即

$$\sqrt{(4-t)^2+6^2}\le 2t+1.$$

平方并化简得

$$3t^2+12t-51\ge 0\Longrightarrow t^2+4t-17\ge 0.$$

首项系数为正的二次多项式非负时，自变量不大于较小根，或不小于较大根．本题的两根为

$$\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot 1\cdot(-17)}}{2}=-2\pm\sqrt{21}.$$

因为较小根 $-2-\sqrt{21}$ 为负数，而 $t \geq 0$，所以必须有 $t \geq \sqrt{21}-2$. 等号可取，所求最短时间为 $\sqrt{21}-2$ 小时.

第 7 题 · THM

Mulan 命令 10 名士兵站成一排. 每名士兵独立地、等可能地指向自己相邻士兵中的一人. 求恰有 3 对相邻士兵互相指向对方的概率.

解析.

答案. $\dfrac{63}{128}$

命题：Sebastian Attlan.

用 R 表示指向右边的士兵，用 L 表示指向左边的士兵. 最左端士兵只能标为 R，最右端士兵只能标为 L.

一对士兵互相指向对方，对应字符串中的相邻子串 RL. 如果恰有 3 对，字符串就能分成六个非空块：

$$\underbrace{R\cdots R}\ \underbrace{L\cdots L}\ \underbrace{R\cdots R}\ \underbrace{L\cdots L}\ \underbrace{R\cdots R}\ \underbrace{L\cdots L}.$$

每块至少有 1 名士兵. 这样的排列数，等于在士兵之间的 9 个空隙中选 5 个放置分隔符的方案数，每个分隔符表示方向改变. 例如

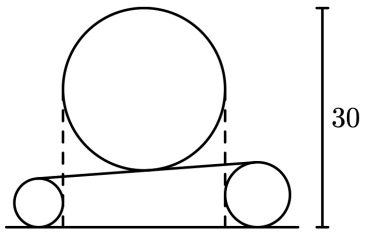
$$R\,|\,LL\,|\,R\,|\,L\,|\,R\,|\,LLLL \quad\longleftrightarrow\quad RLLRLRLLLL.$$

因此符合条件的排列有 $\dbinom{9}{5}$ 种，而全部等可能排列有 2^8 种，所求概率为

$$\frac{\binom{9}{5}}{2^8}=\frac{126}{256}=\frac{63}{128}.$$

第 8 题 · THM

Cinderella 的南瓜马车由两个圆形车轮和一个圆形南瓜组成，三者都与同一条线段相切. 马车停在平地上时，南瓜的最左点位于左轮最右点的正上方，南瓜的最右点位于右轮最左点的正上方. 两轮半径分别为 $3, 4$，且整辆马车的高度为 30. 求南瓜的半径.



解析.

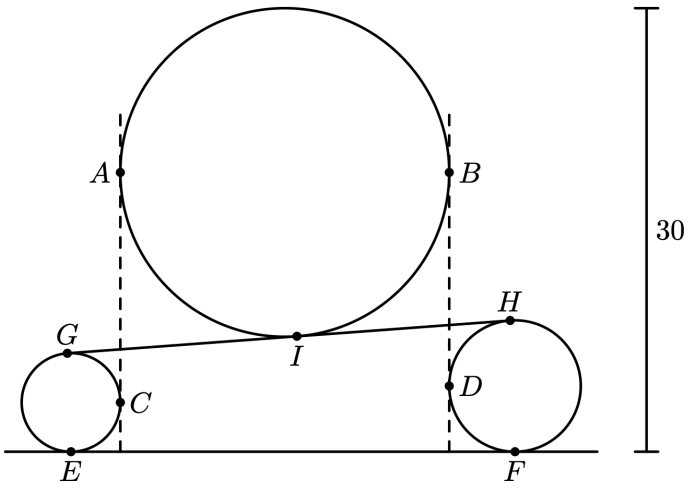
答案. $\dfrac{23}{2}$

命题：Benny Wang.

用圆 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ 分别表示左轮、南瓜和右轮，半径分别为 $r_1 = 3, r_2, r_3 = 4$. 定义以下各点：

- $A \in \omega_2, C \in \omega_1$ 为两圆竖直公切线上的切点.
- $B \in \omega_2, D \in \omega_3$ 为这两圆另一条竖直公切线上的切点.
- $E \in \omega_1, F \in \omega_3$ 为两车轮的水平公切线上的切点.
- $G \in \omega_1, H \in \omega_3$ 为两车轮另一条公切线上的切点.
- $I \in \omega_2$ 为直线 GH 上的切点.

如图所示.



关键是反复运用同一点引圆的两条切线段等长，可得

$$AC + BD = GI + HI = GH = EF.$$

因为 EF 水平，且各圆按题设竖直对齐，

$$EF = r_1 + 2r_2 + r_3 = 2r_2 + 7.$$

又因为 AC 竖直，车高为 30，有 $r_1 + AC + r_2 = 30$，所以 $AC = 27 - r_2$. 同理，$BD = 26 - r_2$. 因此

$$2r_2 + 7 = (27 - r_2) + (26 - r_2) \Longrightarrow r_2 = \frac{23}{2}.$$

第 9 题 · THM

求满足 $be\ell+\ell+e=6886$ 和 $be+\ell+\ell e=586$ 的唯一正整数三元组 (b,e,ℓ).

解析.

答案. $(19,10,36)$

命题：Derek Liu、Eric Wang.

第一式减去第二式，得

$$be\ell-be+e-\ell e=e(b-1)(\ell-1)=6300.$$

两式相加后再加 2，得

$$be\ell+be+e+\ell e+2\ell+2=((b+1)e+2)(\ell+1)=7474=2\cdot37\cdot101.$$

所以 $\ell-1\mid6300$，$\ell+1\mid7474$. 由第一式可知 $\ell-1>0$，因此 $\ell+1\geq3$. 满足条件的正因数只有六个：$37,74,101,202,3737,7474$. 其中只有 $\ell+1=37$ 时，$\ell-1=35$ 是 6300 的因数，故 $\ell=36$. 于是

$$e(b-1)=\frac{6300}{35}=180,\qquad(b+1)e=\frac{7474}{37}-2=200.$$

两式相减，得 $2e=20$，所以 $e=10,b=19$. 唯一解为 $(b,e,\ell)=(19,10,36)$.

第 10 题 · THM

Merida 在城堡墙上画了一个边长为 4 个单位长度的等边三角形 ABC，并尝试向三个顶点各射一箭. 然而三箭分别落在 D,E,F，且它们到 A,B,C 的距离分别为 $1,2,3$ 个单位长度. 此外，三角形 DEF 与三角形 ABC 的重心重合. 求三角形 DEF 面积的最大可能值.

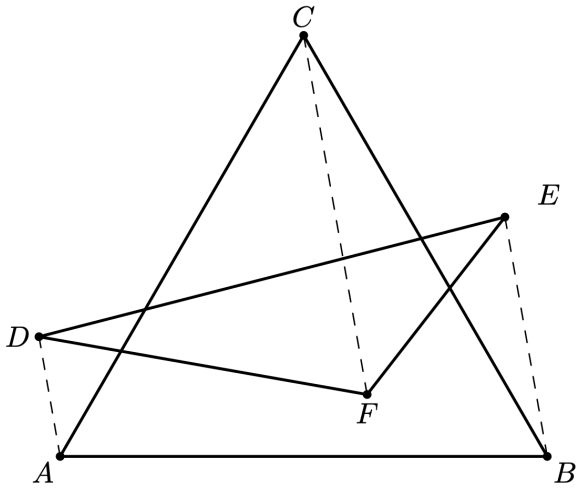
解析.

答案. $4\sqrt{3}+2\sqrt{21}$

命题：Aprameya Tripathy.

译前说明 官方给出了三种解法，其中解法二又分别用柯西不等式和微积分求极值. 以下全部保留. 原文中若干符号、系数及点名存在错误，已在相应位置明确列出；正文使用经核算的修正式，最终答案不变. 记 $[XYZ]$ 为三角形 XYZ 的面积.

解法一：向量叉积



用 $\vec{X}$ 表示点 X 的位置向量，用 $\overrightarrow{XY}$ 表示从 X 指向 Y 的向量．重心相同给出

$$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=(\vec{D}-\vec{A})+(\vec{E}-\vec{B})+(\vec{F}-\vec{C})=\vec{0}.$$

又有 $|\overrightarrow{AD}|=1,|\overrightarrow{BE}|=2,|\overrightarrow{CF}|=3$．由三角不等式，

$$|\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}|\geq|\overrightarrow{CF}|-|\overrightarrow{BE}|-|\overrightarrow{AD}|=3-2-1=0.$$

这里取等号，故三个向量平行，$\overrightarrow{CF}$ 与 $\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BE}$ 方向相反．因此

$$\overrightarrow{BE}=2\overrightarrow{AD},\qquad \overrightarrow{CF}=-3\overrightarrow{AD}.$$

三角形 DEF 的面积等于 $\overrightarrow{DE}\times\overrightarrow{DF}$ 的模的一半．展开可得

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DE}\times\overrightarrow{DF}&=(\overrightarrow{BE}-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB})\times(\overrightarrow{CF}-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC})\\&=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB})\times(-4\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC})\\&=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\times(\overrightarrow{AC}+4\overrightarrow{AB})-4\overrightarrow{AD}\times\overrightarrow{AD}\\&=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\times(\overrightarrow{AC}+4\overrightarrow{AB}).\end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{AD}\times(\overrightarrow{AC}+4\overrightarrow{AB})\right|&\leq|\overrightarrow{AD}|\,|\overrightarrow{AC}+4\overrightarrow{AB}|\\&=\sqrt{4^2+16^2+2\cdot\frac{1}{2}\cdot4\cdot16}=4\sqrt{21}.\end{aligned}$$

令 $\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{AC}+4\overrightarrow{AB}$ 即可取等号，而 $\overrightarrow{AD}$ 的方向可以任意选择，所以该等号能够实现．必要时把 $\overrightarrow{AD}$ 反向，还可以使这个叉积与 $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ 同向．

又因为 $|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$ 是 $[ABC]$ 的两倍，等于 $8\sqrt{3}$，且上述两个叉积都垂直于同一平面，所以

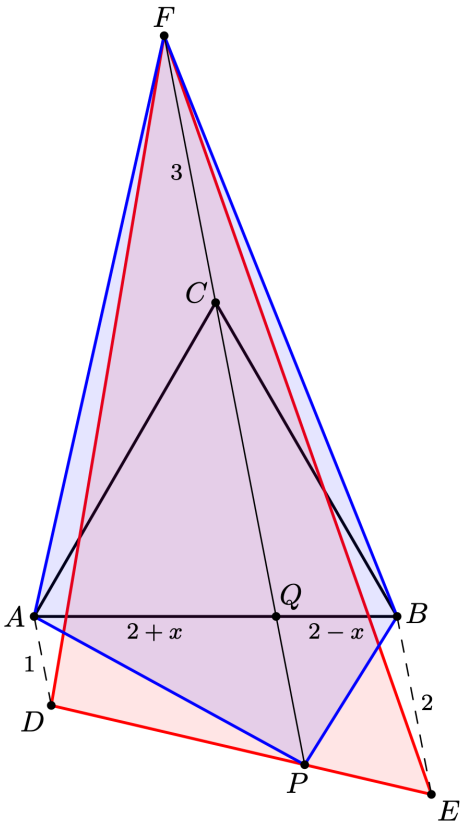
$$[DEF]=\frac{1}{2}|\overrightarrow{DE}\times\overrightarrow{DF}|\le\frac{1}{2}(8\sqrt{3}+4\sqrt{21})=4\sqrt{3}+2\sqrt{21}.$$

如上所述，等号可取.

原文勘误一 官方第 8 页展开及后续各处均写成 $\overrightarrow{AC}-4\overrightarrow{AB}$，应统一改为 $\overrightarrow{AC}+4\overrightarrow{AB}$. 原因是 $-4\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}=4\overrightarrow{AD}\times\overrightarrow{AB}$. 原文随后写出的模长数值 $4\sqrt{21}$ 实际对应加号式；减号式的模长为 $4\sqrt{13}$.

解法二：面积变换

与解法一相同，$\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BE},\overrightarrow{CF}$ 的和为零，因此首尾相接构成一个三角形. 三边长为 $1,2,3$，故这个三角形退化，得 $AD\parallel BE\parallel CF$. 以下用经典几何继续求解.



设直线 CF 分别与直线 DE,AB 交于 P,Q. 图示构型中的关键面积变换为

$$\begin{aligned}[DEF]&=[FDP]+[FEP]\\&=[FAP]+[FBP]=[FAPB]=[ABC]\cdot\frac{FP}{CQ}.\end{aligned}$$

所以只需使 $\dfrac{FP}{CQ}$ 最大. 令 M 为 AB 的中点，$MQ=|x|$，并规定 $x>0$ 当且仅当 A,M,Q 按此顺序排列. 于是 $AQ=2+x,BQ=2-x$，由勾股定理

$$CQ=\sqrt{CM^2+MQ^2}=\sqrt{x^2+12}.$$

因为 $AD\parallel QP\parallel BE$，$QP$ 是 AD,BE 的加权平均，故

$$QP=\frac{AQ\cdot BE+BQ\cdot AD}{AB}=\frac{(2+x)\cdot 2+(2-x)\cdot 1}{4}=\frac{6+x}{4}.$$

从而

$$\frac{FP}{CQ}=1+\frac{CF+PQ}{CQ}=1+\frac{3+\frac{6+x}{4}}{\sqrt{x^2+12}}=1+\frac{18+x}{4\sqrt{x^2+12}}.$$

接下来要使 $\dfrac{x+18}{4\sqrt{x^2+12}}$ 最大，官方给出以下两种方法.

方法一：柯西不等式 由柯西不等式，

$$(x^2+12)(1+27)\geq(x+18)^2,$$

所以

$$\frac{x+18}{4\sqrt{x^2+12}}\leq\frac{\sqrt{28}}{4}=\frac{\sqrt{7}}{2}.$$

等号条件是两个向量同向成比例，得到 $x=\dfrac{2}{3}$（原解写出的比例平方关系为 $\dfrac{x^2}{1}=\dfrac{12}{27}$；还应结合符号取正值）.

方法二：微积分 令 $f(x)=\dfrac{x+18}{4\sqrt{x^2+12}}$，利用商的求导法则，

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{x^2+12}-(x+18)\frac{2x}{2\sqrt{x^2+12}}}{x^2+12}\\&=\frac{1}{4}\cdot\frac{(x^2+12)-x(x+18)}{(x^2+12)^{3/2}}\\&=\frac{1}{4}\cdot\frac{12-18x}{(x^2+12)^{3/2}}.\end{aligned}$$

导数为零当且仅当 $x=\dfrac{2}{3}$. 函数在 $(-\infty,\dfrac{2}{3})$ 上递增，在 $(\dfrac{2}{3},+\infty)$ 上递减，故唯一全局最大值在 $x=\dfrac{2}{3}$ 处取得，最大值为 $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$.

综合可得图示构型的最大面积为

$$[ABC]\max_x\frac{FP}{CQ}=4\sqrt{3}\left(1+\frac{\sqrt{7}}{2}\right)=4\sqrt{3}+2\sqrt{21}.$$

原文勘误二 官方第 9 页把 QP 代入式的两个权重反配，写成 $\dfrac{(2+x)\cdot 1+(2-x)\cdot 2}{4}=\dfrac{6-x}{4}$；应为上文的 $\dfrac{6+x}{4}$. 原文下一行又把 $18-x$ 写为 $18+x$，恰好回到了正确结果. 第 10 页求导后两行的 $\dfrac{1}{8}$ 应为 $\dfrac{1}{4}$，不影响极值点. 末行的 $\max\dfrac{DP}{AQ}$ 应为 $\max\dfrac{FP}{CQ}$. 此外，原文将四边形记作 $[FABP]$，按图示边界顺序应为 $[FAPB]$.

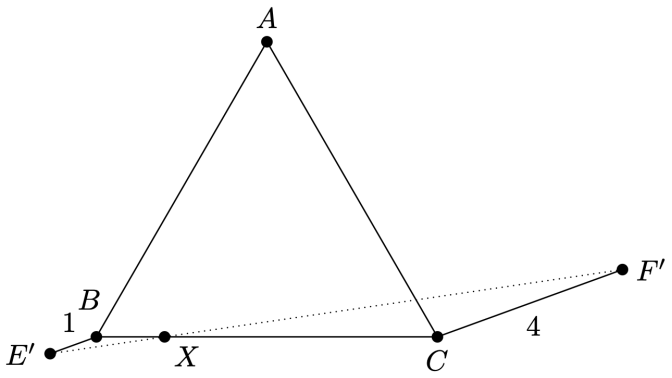
论证范围说明 上面的无向长度及面积拼合按官方图示位置成立；原解没有讨论任意射击方向下的有向长度、交点次序，以及 $CF \parallel AB$ 时交点不存在的情况．因此不把这段图示计算单独宣称为覆盖所有构型的上界证明．解法一已对所有方向严格证明全局上界；图示取 $x=\dfrac{2}{3}$ 时满足该构型条件并达到上界，故这里的极值结论正确．

解法三：平移与固定点

先回顾前两解的结论：直线 AD, BE, CF 平行，其中射线 $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BE}$ 同向，$\overrightarrow{CF}$ 反向．

在射线 $\overrightarrow{BE}$ 上取点 E'，使 $BE'=1$；在射线 $\overrightarrow{CF}$ 上取点 F'，使 $CF'=4$．则 $\triangle AE'F'$ 是将 $\triangle DEF$ 沿 $\overrightarrow{DA}$ 方向平移 1 个单位长度得到的，所以只需使 $[AE'F']$ 最大．

在边 BC 上取点 X，使 $\dfrac{XB}{XC}=\dfrac{1}{4}$．



断言 线段 $E'F'$ 总是经过固定点 X，且 $\dfrac{XE'}{XF'}=\dfrac{1}{4}$．

证明 因为 $\dfrac{E'B}{F'C}=\dfrac{BX}{CX}=\dfrac{1}{4}$，且由 $BE' \parallel CF'$ 可得 $\angle E'BX=\angle F'CX$，所以由边角边判定 $\triangle E'BX \sim \triangle F'CX$．从而 $\angle BXE'=\angle CXF'$，故 E', X, F' 共线，而且 $\dfrac{XE'}{XF'}=\dfrac{BX}{CX}=\dfrac{1}{4}$，断言得证．

由断言，$[AE'F']=5[AE'X]$．因此只需使 $[AE'X]$ 最大．因为 AX 固定，等价于使 E' 到直线 AX 的距离最大．记 $\operatorname{dist}(P,l)$ 为点 P 到直线 l 的距离，则

$$\operatorname{dist}(E', AX) \le \operatorname{dist}(E', B) + \operatorname{dist}(B, AX) = 1 + \frac{2[ABX]}{AX}.$$

当 $E'B \perp AX$，且从 B 指向 E' 的方向远离直线 AX 时，等号成立．于是

$$\begin{aligned}[DEF] = [AE'F'] &= 5[AE'X] \\ &= \frac{5AX \cdot \operatorname{dist}(E', AX)}{2} \\ &\le 5[ABX] + \frac{5AX}{2}.\end{aligned}$$

计算得

$$[ABX]=\frac{[ABC]}{5}=\frac{4\sqrt{3}}{5}, \qquad AX=\sqrt{\left(\frac{6}{5}\right)^2+(2\sqrt{3})^2}=\frac{4\sqrt{21}}{5}.$$

因此最大面积为

$$5[ABX]+\frac{5AX}{2}=4\sqrt{3}+2\sqrt{21}.$$

原文细节三　官方第 11 页将取等条件写成 “E' 与 X 位于直线 AB 两侧”. 在本题给定构型并同时要求 $E'B\perp AX$ 时，这一方向选择能够选中取等方向；距离不等式更直接、普适的条件是 “E' 从 B 沿远离直线 AX 的垂直方向移动”. 这里将取等原因明确化，没有改变其可达到性结论. 对于辅助三角形退化的特殊方向，断言也可由向量等式 $X=\dfrac{4E'+F'}{5}=\dfrac{4B+C}{5}$ 直接验证.

题目 · Team（团队轮）

第 1 题 · TEAM（20 分）

Jerry 和 Sophie 各自得到一个数. 两人都被告知以下信息：

- 他们的数是 2 到 50 之间（含端点）的两个不同整数.
- Jerry 的数是 Sophie 的数的某个整数次幂.

然而，仅根据这些信息，两人都无法确定对方的数. 求这两个数之和.

解析.

答案. 18

设 Jerry 的数为 j，Sophie 的数为 s，并设正整数 n 满足 $j = s^n$. 由于 j 与 s 不同，故 $n > 1$.

取正整数 t, m，使得 $j = t^m$，且 t 尽可能小. 于是 $n \mid m$. 因此，m 至少有两个不同的大于 1 的正因数，否则 Jerry 就能确定 n，从而确定 s.

由于 $2^6 > 50$，故 $m \le 5$. 其中只有 $m = 4$ 有足够多的因数. 又因为 $3^4 > 50$，所以 $t = 2$.

因此 $j = 2^4 = 16$，它既是 2 的幂，也是 4 的幂. 如果 Sophie 得到的是 4，由于 $4^3 > 50$，她便会知道 Jerry 的数是 $4^2 = 16$. 因此 $s = 2$，所求为 $16 + 2 = 18$.

第 2 题 · TEAM（25 分）

当 m, n 遍历所有正整数时，求表达式

$$(\sqrt{21} + \sqrt{55})^2 + (\sqrt{m} - \sqrt{n})^2$$

所能取到的最小整数值.

解析.

答案. 144

展开所给表达式，得到

$$21 + 2\sqrt{21 \cdot 55} + 55 + m - 2\sqrt{mn} + n.$$

因为 m, n 是正整数，所以原式为整数，当且仅当 $2\sqrt{21 \cdot 55} - 2\sqrt{mn}$ 为整数.

断言 1 上述条件成立，当且仅当 $mn = 21 \cdot 55$.

证明 显然，若 $mn = 21 \cdot 55$，则 $2\sqrt{21 \cdot 55} - 2\sqrt{mn} = 0$ 是整数.【译注：官方此句将乘积误印为 $21\sqrt{55}$，这里按断言及后续计算订正.】

反设 $mn \neq 21 \cdot 55$，但上述差为整数. 那么存在非零整数 k，使得 $2\sqrt{21 \cdot 55} = 2\sqrt{mn} + k$. 两边平方可得

$$4 \cdot 21 \cdot 55 = 4mn + 4k\sqrt{mn} + k^2.$$

由于 $k \neq 0$，整理得到

$$2\sqrt{mn} = \frac{4 \cdot 21 \cdot 55 - 4mn - k^2}{2k}.$$

因此 $2\sqrt{mn}$ 是有理数．又因为 $2\sqrt{21 \cdot 55} - 2\sqrt{mn}$ 是整数，所以 $2\sqrt{21 \cdot 55}$ 也必须是有理数．然而它显然是无理数，矛盾．断言得证．

由断言，正整数 m, n 必须是 $21 \cdot 55$ 的因数．当 $mn = 21 \cdot 55$ 时，原式等于 $21 + 55 + m + n$，所以只须在这一条件下使 $m + n$ 最小．

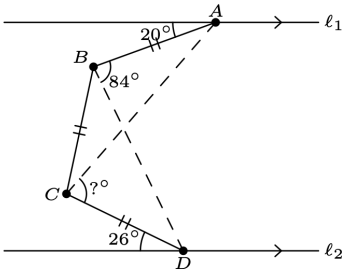
我们断言 $m + n$ 的最小值为 68，在 $m = 33, n = 35$ 时取得．这是因为

$$(m+n)^2 \geq (m+n)^2 - (m-n)^2 = 4mn = 4 \cdot 21 \cdot 55 > 67^2.$$

由于 $m + n$ 是正整数，必有 $m + n \geq 68$．因此答案为 $21 + 55 + 68 = 144$.

第 3 题 · TEAM（30 分）

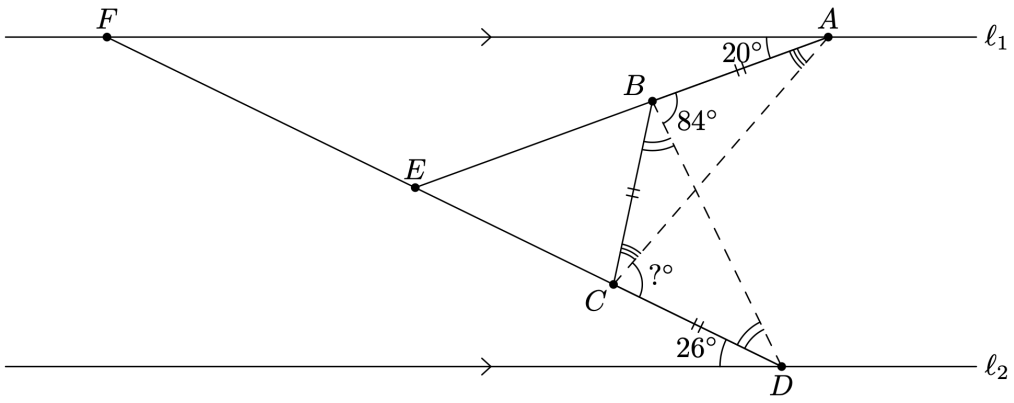
点 A, D 分别在两条平行直线 ℓ_1, ℓ_2 上．点 B, C 位于两平行线之间，满足 $AB = BC = CD$，且 B, C 位于直线 AD 的同一侧．已知 AB 与 ℓ_1 的夹角为 20°，CD 与 ℓ_2 的夹角为 26°，且 $\angle ABD = 84^\circ$．求 $\angle ACD$ 的度数.



解析.

答案. 75°

设直线 DC 分别与直线 AB、ℓ_1 相交于 E, F，如图.



注意到

$$\angle BEC = \angle EAF + \angle EFA = 20^\circ + 26^\circ = 46^\circ.$$

于是，由 $BC = CD$ 可得

$$\angle CBD = \angle CDB = \angle EDB = \angle ABD - \angle BED = 84^\circ - 46^\circ = 38^\circ.$$

再由 $AB = BC$，可知

$$\begin{aligned}\angle BCA &= \frac{180^\circ - \angle ABC}{2} \\ &= \frac{180^\circ - \angle ABD - \angle CBD}{2} \\ &= \frac{180^\circ - 84^\circ - 38^\circ}{2} = 29^\circ\end{aligned}$$

最后，

$$\begin{aligned}\angle ACD &= 180^\circ - \angle BCA - \angle BCE \\ &= 180^\circ - \angle BCA - \angle CBD - \angle CDB \\ &= 180^\circ - 29^\circ - 38^\circ - 38^\circ = 75^\circ\end{aligned}$$

第 4 题 · TEAM（35 分）

正整数数列 $F_0, F_1, F_2, \ldots$ 满足 $F_0 = F_1 = \cdots = F_{2025} = 1$，且对所有整数 $i \geq 2026$，有

$$F_i = F_{i-2025} + F_{i-2026}.$$

求小于 2026、且能表示为某个 F_k（其中 k 为正整数）的正整数 n 的个数.

解析.

答案. 64

为便于观察，将数列开头若干项按每行 2025 项排列如下图. 图中行内相邻两项的差依次构成杨辉三角形.【译注：官方图中的数列记号写作 a，正文记作 F，二者指同一数列.】

$$
\begin{aligned}
a_{2025\cdot 0} &= 1 \quad 1 \qquad\qquad\qquad \cdots \qquad\qquad\qquad 1 \;= a_{2025\cdot 1-1}\\
a_{2025\cdot 1} &= 1 \overset{1}{\frown} 2 \quad 2 \qquad\qquad\qquad \cdots \qquad\qquad\qquad 2 \;= a_{2025\cdot 2-1}\\
a_{2025\cdot 2} &= 2 \overset{1}{\frown} 3 \overset{1}{\frown} 4 \quad 4 \qquad\qquad\qquad \cdots \qquad\qquad\qquad 4 \;= a_{2025\cdot 3-1}\\
a_{2025\cdot 3} &= 4 \overset{1}{\frown} 5 \overset{2}{\frown} 7 \overset{1}{\frown} 8 \quad 8 \qquad\qquad\qquad \cdots \qquad\qquad\qquad 8 \;= a_{2025\cdot 4-1}\\
a_{2025\cdot 4} &= 8 \overset{1}{\frown} 9 \overset{3}{\frown} 12 \overset{3}{\frown} 15 \overset{1}{\frown} 16 \quad 16 \qquad\qquad\qquad \cdots \qquad\qquad\qquad 16 \;= a_{2025\cdot 5-1}\\
a_{2025\cdot 5} &= 16 \overset{1}{\frown} 17 \overset{4}{\frown} 21 \overset{6}{\frown} 27 \overset{4}{\frown} 31 \overset{1}{\frown} 32 \quad 32 \qquad\qquad\qquad \cdots \qquad\qquad\qquad 32 \;= a_{2025\cdot 6-1}\\
a_{2025\cdot 6} &= 32 \overset{1}{\frown} 33 \overset{5}{\frown} 38 \overset{10}{\frown} 48 \overset{10}{\frown} 58 \overset{5}{\frown} 63 \overset{1}{\frown} 64 \quad 64 \qquad\qquad\qquad \cdots \qquad\qquad\qquad 64 \;= a_{2025\cdot 7-1}\\
a_{2025\cdot 7} &= 64 \overset{1}{\frown} 65 \overset{6}{\frown} 71 \overset{15}{\frown} 86 \overset{20}{\frown} 106 \overset{15}{\frown} 121 \overset{6}{\frown} 127 \overset{1}{\frown} 128 \quad 128 \quad \cdots \quad 128 = a_{2025\cdot 8-1}
\end{aligned}
$$

受此表启发，我们提出关于数列 (F_n) 的三个断言，并在解答末尾给出正式证明.

断言 1　数列 (F_i) 单调不减，即对所有非负整数 i，均有 $F_{i+1} \geq F_i$.

断言 2　对所有非负整数 $a \leq 2024$，以及满足 $a \leq b \leq 2025$ 的整数 b，有 $F_{2025a+b} = 2^a$. 在上表中，这对应第 a 行末尾长串的 2^a，以及第 $a+1$ 行开头的一个 2^a.

断言 3　对所有整数 $1 \leq a \leq 2024$ 及 $1 \leq b \leq a$，有

$$F_{2025a+b} = 2^{a-1} + \sum_{i=0}^{b-1} \binom{a-1}{i}.$$

它给出了表中三角形区域内各项的表达式.

由断言 1，某项一旦达到或超过 2026，之后所有项都不小于 2026. 下面用断言 2、3 确定首次出现 $F_n \geq 2026$ 的位置. 由断言 2，

$$F_{2025\cdot 11} = 2^{10} = 1024, \qquad F_{2025\cdot 11+11} = 2^{11} = 2048 > 2026.$$

由断言 3，

$$
\begin{aligned}
F_{2025\cdot 11+10} &= 2^{10} + \sum_{i=0}^{9} \binom{10}{i} = 2^{10} + 2^{10} - \binom{10}{0} = 2047,\\
F_{2025\cdot 11+9} &= 2^{10} + \sum_{i=0}^{8} \binom{10}{i} = 2^{10} + 2^{10} - \binom{10}{0} - \binom{10}{1} = 2037,\\
F_{2025\cdot 11+8} &= 2^{10} + \sum_{i=0}^{7} \binom{10}{i} = 2^{10} + 2^{10} - \binom{10}{0} - \binom{10}{1} - \binom{10}{2} = 1992
\end{aligned}
$$

因此只须考虑 $0 \leq n \leq 2025 \cdot 11 + 8$ 范围内各项的不同取值数.

对每个整数 $1 \leq a \leq 2024$，断言 3 给出 $F_{2025a+1} < \cdots < F_{2025a+a}$，断言 2 给出 $F_{2025a+a} = F_{2025a+a+1} = \cdots = F_{2025(a+1)}$. 因此，从 $F_{2025a+1}$ 到 $F_{2025(a+1)}$（含两端）恰好有 a 个不同的取

值. 当 $a=0$ 时，从 F_1 到 F_{2025} 只有一个不同的值，即 1. 由于 $F_0=F_1$，F_0 不会增加新的取值. 所以截至 F_{2025a}，不同取值的总数为

$$1+1+2+\cdots+(a-1)=\frac{a(a-1)}{2}+1.$$

数列单调不减，且各分段开头严格超过上一段的末值，故不同分段不会贡献重复的新取值.

截至 $F_{2025\cdot 11}$，共有 $\dfrac{11\cdot 10}{2}+1=56$ 个不同取值. 又因

$$F_{2025\cdot 11}<F_{2025\cdot 11+1}<\cdots<F_{2025\cdot 11+8},$$

还须加上 8 个不同取值，故答案是 $56+8=64$.

下面正式证明三个断言.

断言 1 的证明 对 i 作强归纳. 初始情形 $0\le i\le 2024$ 时，相邻两项均为 1；当 $i=2025$ 时，$F_{2026}=2\ge F_{2025}=1$.【译注：官方初始步骤误写为对 $0\le i\le 2026$ 都有 $F_i=1$；实际 $F_{2026}=2$，这里明确订正.】

若此前相邻项均已满足不减性，则对 $i\ge 2026$，

$$F_{i+1}=F_{i-2024}+F_{i-2025}\ge F_{i-2025}+F_{i-2026}=F_i.$$

其中两次不等式分别来自归纳假设 $F_{i-2024}\ge F_{i-2025}$ 和 $F_{i-2025}\ge F_{i-2026}$.

断言 2 的证明 对 a 归纳. 当 $a=0$ 时，由 $F_0=\cdots=F_{2025}=1$ 可知结论成立. 假设结论对 a 及所有 $a\le b\le 2025$ 成立. 对任意 $a+1\le b\le 2025$，有

$$F_{2025(a+1)+b}=F_{2025a+b}+F_{2025a+b-1}=2^a+2^a=2^{a+1}.$$

这里分别对 (a,b) 和 $(a,b-1)$ 使用了归纳假设.

断言 3 的证明 对 a 归纳. 当 $a=1$ 时，$F_{2025}=2^{a-1}=1$，$F_{2026}=2^{a-1}+\binom{0}{0}=2$.

假设结论对 a 及所有 $1\le b\le a$ 成立. 为证明 $a+1$ 的情形，先取 $1\le b\le a$. 若 $b>1$，分别对 (a,b)、$(a,b-1)$ 使用归纳假设，有

$$\begin{aligned}
F_{2025(a+1)+b} &= F_{2025a+b} + F_{2025a+b-1} \\
&= 2^{a-1} + \sum_{i=0}^{b-1} \binom{a-1}{i} + 2^{a-1} + \sum_{i=0}^{b-2} \binom{a-1}{i} \\
&= 2^a + 1 + \sum_{i=1}^{b-1} \binom{a-1}{i} + \sum_{i=0}^{b-2} \binom{a-1}{i} \\
&= 2^a + 1 + \sum_{i=1}^{b-1} \left(\binom{a-1}{i} + \binom{a-1}{i-1} \right) \\
&= 2^a + 1 + \sum_{i=1}^{b-1} \binom{a}{i} \\
&= 2^a + \sum_{i=0}^{b-1} \binom{a}{i}
\end{aligned}$$

倒数第二步用了帕斯卡恒等式. 【译注：官方第三行第二个求和的上限误写成 $b-1$，应为 $b-2$，否则与前后行不相等. 】

若 $b=1$，则不能把归纳假设用于 $(a, b-1)$，因为第二个参数为 0. 改用断言 2，得到

$$F_{2025a+b-1} = F_{2025a} = F_{2025(a-1)+2025} = 2^{a-1}.$$

再对 (a, b) 使用归纳假设，得到

$$\begin{aligned}
F_{2025(a+1)+b} &= F_{2025a+b} + F_{2025a+b-1} \\
&= F_{2025a+1} + F_{2025a} \\
&= 2^{a-1} + \sum_{i=0}^{0} \binom{a-1}{i} + 2^{a-1} \\
&= 2^a + 1 = 2^a + \sum_{i=0}^{b-1} \binom{a}{i}
\end{aligned}$$

【译注：官方归纳假设的范围一度误写为 $0 \le b \le a$，与后文排除 $b=0$ 不符；此外，原证明未写出新端点 $b=a+1$. 补足该端点：由断言 2，$F_{2025(a+1)+(a+1)} = 2^{a+1}$；而 $2^a + \sum_{i=0}^{a} \binom{a}{i} = 2^a + 2^a = 2^{a+1}$，故端点同样成立. 】

第 5 题 · TEAM（40 分）

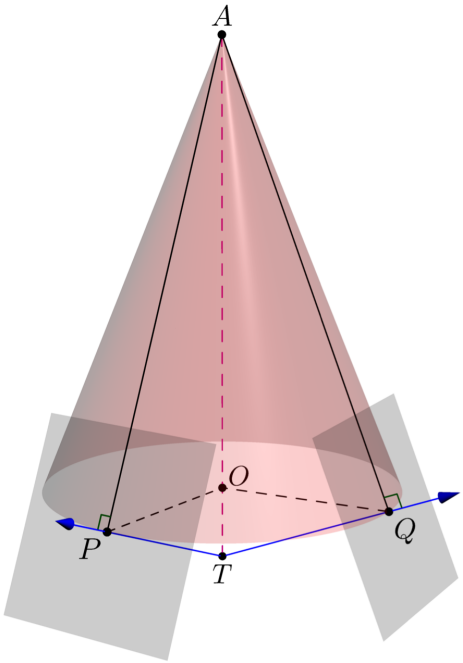
一个正圆锥的顶点为 A，底面半径为 1，高为 7. 两个互相垂直的平面分别沿线段 AP, AQ 与圆锥侧面相切，其中 P, Q 位于圆锥的底面圆周上. 求 PQ.

解析.

答案. $\dfrac{10}{7}$

解法 1

取圆锥轴线上唯一的点 T，使得对底面圆周上的任意点 K，都有 $\angle AKT = 90^\circ$. 于是，沿 AP 相切的平面垂直于 PT，沿 AQ 相切的平面垂直于 QT. 两个平面互相垂直，当且仅当它们的法向量互相垂直，所以题设两切平面垂直等价于 $\angle PTQ = 90^\circ$.



对底面圆周上任意点 K, 长度 KT 是一个定值, 记作 λ. 设底面圆心为 O. 由于 $\angle KAO = \angle TAK$, 且 $\angle AOK = \angle AKT = 90^\circ$，故 $\triangle AOK \sim \triangle AKT$. 于是

$$\lambda = KT = OK \cdot \frac{AK}{AO} = 1 \cdot \frac{\sqrt{1^2+7^2}}{7} = \frac{5\sqrt{2}}{7}.$$

特别地，$PT = QT = \dfrac{5\sqrt{2}}{7}$，且 $\angle PTQ = 90^\circ$，所以

$$PQ = \sqrt{2} \cdot PT = \frac{10}{7}.$$

解法 2

点 T 的定义同解法 1，记 $\overrightarrow{XY}$ 为从 X 指向 Y 的向量. 由解法 1，$PT \perp QT$，因此

$$\overrightarrow{PT} \cdot \overrightarrow{QT} = 0.$$

下面求这两个向量. 令底面位于 xy 平面上，顶点 $A = (0,0,7)$ 位于 z 轴上. 不妨取 $P = (1,0,0)$，于是对某个角 θ，有 $Q = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$. 原点 $O = (0,0,0)$ 同时也是底面圆心.

设 P' 为 P 关于直线 AT 的对称点. 由于 $\angle AP'T = \angle APT = 90^\circ$，$P, P'$ 都位于以 AT 为直径的圆上. 又因为 PP' 与 AT 相交于 O，由相交弦定理，

$$OT = \frac{OP \cdot OP'}{OA} = \frac{1 \cdot 1}{7} = \frac{1}{7}.$$

因此 $T=(0,0,-\frac{1}{7})$，从而

$$\overrightarrow{PT}=\left(-1,0,-\frac{1}{7}\right),\qquad \overrightarrow{QT}=\left(-\cos\theta,-\sin\theta,-\frac{1}{7}\right).$$

于是

$$0=\overrightarrow{PT}\cdot\overrightarrow{QT}=\left(-1,0,-\frac{1}{7}\right)\cdot\left(-\cos\theta,-\sin\theta,-\frac{1}{7}\right)=\cos\theta+\frac{1}{49},$$

得到 $\cos\theta=-\frac{1}{49}$. 对 $\triangle POQ$ 使用余弦定理，得

$$PQ^2=1^2+1^2-2\cdot1\cdot1\cdot\left(-\frac{1}{49}\right)=\frac{100}{49}.$$

故 $PQ=\frac{10}{7}$.

第 6 题 · TEAM（45 分）

已知 a,b 均为大于 1 的整数，且 $\frac{a+b^2}{a^2}$ 是整数. 求 b 的最小可能值.

解析.

答案. 35

先证明如下断言.

断言 1 a 是完全平方数.

证明 设整数 x 满足 $\frac{a+b^2}{a^2}=x$，整理得到

$$b^2=xa^2-a=a(xa-1).$$

由于 $\gcd(a,xa-1)=1$，而 $a(xa-1)$ 是完全平方数，所以 a 是完全平方数.【译注：官方在最大公因数式后漏印 “$=1$”，这里补足.】

于是可设 $a=c^2$，其中整数 $c>1$. 由 $c^4\mid c^2+b^2$，有 $c^2\mid c^2+b^2$，进而 $c^2\mid b^2$，所以 $b=nc$，其中 n 为正整数. 代回可得 $c^4\mid c^2+n^2c^2$，这等价于 $c^2\mid 1+n^2$. 我们要使 nc 最小.

平方数 n^2 模 4 的余数只能是 0 或 1，因此 $1+n^2$ 模 4 的余数只能是 1 或 2，不可能被 4 整除. 所以 $4\nmid c^2$，即 c 为奇数.

同样，n^2 模 3 的余数只能是 0 或 1，故 $1+n^2$ 模 3 的余数只能是 1 或 2，不会被 3 整除. 所以 c 也不能被 3 整除.

由于 $c>1$，最小的候选值依次是 $5,7$. 当 $c=5$ 时，须有 $25\mid 1+n^2$，从而 $n\geq 7$；而 $n=7$ 的确可行，因为 $1+7^2=50$. 此时 $b=5\cdot7=35$.

若 $c\geq 7$，则由 $n^2+1\geq c^2$ 可得 $n\geq 7$，于是 $b=nc\geq 7\cdot7=49$.【译注：官方这里误写为 $n\geq 7\cdot7=49$，实际被估计的是 $b=nc$.】

综上，$b=nc\geq 35$. 取 $n=7,c=5$ 时，$a=c^2=25$，且

$$a + b^2 = 25 + 35^2 = 25(1 + 7^2) = 25 \cdot 50$$

确实能被 25^2 整除. 因此答案为 35.

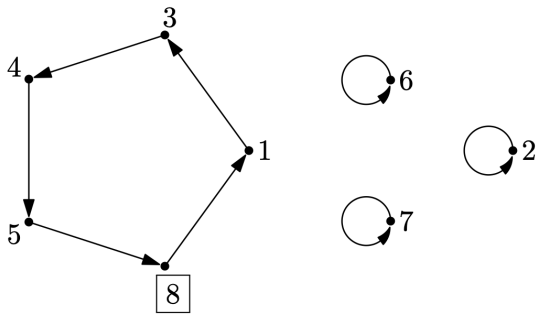
第 7 题 · TEAM（45 分）

Alice 有 8 个球和 8 个盒子，球与盒子都分别编号为 $1, 2, 3, \ldots, 8$. 她要在每个盒子中恰好放一个球，并且恰有一个球的编号严格大于所在盒子的编号. 求满足条件的放法数.

解析.

答案. 247

把球 i 放入盒子 $f(i)$，则每一种放法恰好对应集合 $\{1, 2, \ldots, 8\}$ 到自身的一个排列 f. 因此，要数的是恰有一个指标 i 满足 $f(i) < i$ 的排列. 称这样的指标为 “好指标”.



假设 f 恰有一个好指标，考察它的不交循环分解. 恒等排列没有好指标，所以 f 不是恒等排列，至少有一个长度不小于 2 的循环. 取这样一个循环 $(a_1\ a_2\ \cdots\ a_k)$，不妨设 a_1 是其中最小的指标. 于是 $f(a_k) = a_1 < a_k$，所以 a_k 是好指标，且是 f 唯一的好指标.

这说明，对 $i < k$，必须有 $f(a_i) \geq a_i$，即 $a_{i+1} \geq a_i$，故

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_k.$$

循环中的指标互不相同，所以实际上严格递增. 此外，每个长度至少为 2 的循环都至少含一个好指标，所以 f 只能有一个这样的循环；其他指标都只能属于长度为 1 的循环，也就是不动点.

因此，f 的循环分解由一个长度至少为 2、元素按严格递增顺序排列的循环，以及若干长度为 1 的循环组成. 反过来，这样的每个 f 都恰有一个好指标：递增的非平凡循环有且仅有一个好指标，其余不动点都不是好指标.

图示给出了一个例子，唯一的好指标用方框标出.

这样的排列 f 完全由那个唯一非平凡循环中的元素集合确定，因为这些元素必须按递增顺序排列，而其余元素均为不动点. 所以，只须计算集合 $\{1, 2, \ldots, 8\}$ 中大小至少为 2 的子集个数，答案为

$$\sum_{k=2}^{8} \binom{8}{k} = 2^8 - 8 - 1 = 247.$$

第 8 题 · TEAM（50 分）

在三角形 ABC 中，$AB=13, BC=14, CA=15$. 在线段 BC 上选取点 D. 点 P, Q 满足 $\angle PBC=90^\circ$、$\angle QCB=90^\circ$，且四边形 $APDQ$ 是以 PQ 为对称轴的箏形. 选取 D 使 $\angle PAQ$ 最大，求此时的 AD.

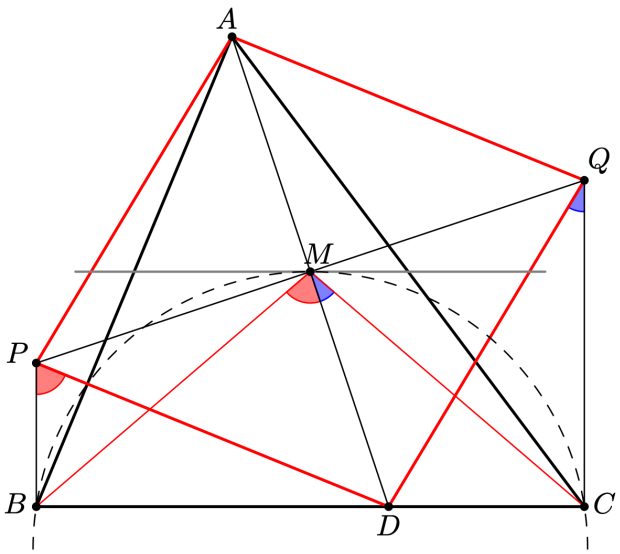
解析.

答案. $4\sqrt{10}$

由箏形的性质，PQ 是 AD 的垂直平分线，且 $\angle PAQ=\angle PDQ$. 设 PQ 与 AD 相交于 M，则 M 是 AD 的中点. 又因为 $\angle PMD=\angle PBD=90^\circ$，所以 P, M, B, D 四点共圆；同理，Q, M, C, D 四点共圆. 于是

$$\begin{aligned}\angle PAQ=\angle PDQ&=\angle PDM+\angle QDM\\&=\angle PBM+\angle QCM\\&=(90^\circ-\angle MBC)+(90^\circ-\angle MCB)\\&=180^\circ-\angle MBC-\angle MCB\\&=\angle BMC\end{aligned}$$

因此，只须使 $\angle BMC$ 最大. 点 M 在连接 AB, AC 中点的固定直线 ℓ 上运动. 若 $\triangle BMC$ 的外接圆与 ℓ 不相切，则 ℓ 上存在落在该圆内部的点 M'，此时 $\angle BM'C>\angle BMC$. 所以，当 $\angle BMC$ 最大时，$\triangle BMC$ 的外接圆必须在 M 处与 ℓ 相切. 特别地，此时 $BM=MC$.



最后，由海伦公式，$\triangle ABC$ 的面积为

$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=84,$$

所以从 A 向 BC 所作的高为 $\dfrac{2\cdot 84}{BC}=12$.

设垂足为 A'. 由勾股定理，

$$BA'=\sqrt{BA^2-AA'^2}=\sqrt{13^2-12^2}=5,$$

从而 $CA'=BC-BA'=14-5=9$. 因此，BC 的垂直平分线与直线 AA' 的距离为 $\dfrac{14}{2}-5=2$，点 M 到 AA' 的距离也为 2. 由于 D 与 A 关于点 M 对称，故 $A'D=2\cdot 2=4$，从而

$$AD^2=AA'^2+DA'^2=144+16=160.$$

所以答案为 $\sqrt{160}=4\sqrt{10}$.

【核验补充：原解将 M 的轨迹简写为直线，实际是中位线段.取 $B=(0,0),C=(14,0),A=(5,12)$，则 M 的横坐标在 $[\dfrac{5}{2},\dfrac{19}{2}]$ 内；上述最优点 $M=(7,6)$ 确在该区间内，对应 $D=(9,0)$，因此没有遗漏线段限制.】

第 9 题 · TEAM（50 分）

实数 x,y,z 满足

$$\begin{cases}x+y-\sqrt{z^2+1}=-5,\\ y+z-\sqrt{x^2+1}=0,\\ z+x-\sqrt{y^2+1}=5\end{cases}$$

求 $x+y+z$.

解析.

答案. $\dfrac{\sqrt{38}+3\sqrt{2}}{2}$

作代换

$$x=\frac{1}{2}\left(a-\frac{1}{a}\right),\quad y=\frac{1}{2}\left(b-\frac{1}{b}\right),\quad z=\frac{1}{2}\left(c-\frac{1}{c}\right),$$

其中 $a,b,c>0$. 这样代换的目的在于

$$\sqrt{x^2+1}=\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right),$$

另两项也类似. 代入并整理，原方程组变为

$$\begin{cases}\frac{1}{2}\left(a+b-c-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\right)=-5,\\ \frac{1}{2}\left(b+c-a-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\right)=0,\\ \frac{1}{2}\left(c+a-b-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\right)=5\end{cases}$$

令 $s=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$. 将上述方程两两相加，得到

$$a-s=0,\qquad b-s=-5,\qquad c-s=5.$$

所以 $a=s, b=s-5, c=s+5$，从而

$$s=\frac{1}{s}+\frac{1}{s-5}+\frac{1}{s+5}.$$

通分得到 $s=\dfrac{3s^2-25}{s^3-25s}$，因此 $s^4-28s^2+25=0$. 由 $s>0$，可得

$$s=\sqrt{14\pm3\sqrt{19}}=\sqrt{\frac{28\pm2\sqrt{171}}{2}}=\frac{\sqrt{19}\pm3}{\sqrt{2}}.$$

又因为 $a+b+c=3s$，所以

$$x+y+z=\frac{1}{2}(a+b+c)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=s.$$

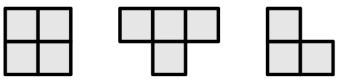
官方最后用 $x+y+z>3$ 排除较小根，得到

$$x+y+z=\frac{\sqrt{38}+3\sqrt{2}}{2}.$$

【译注：官方称 “将题设三个方程相加即可得到 $x+y+z>3$”，这一步论据不足；直接相加只容易得到 $x+y+z\geq\dfrac{3}{2}$. 可直接使用前面已经得到的 $b=s-5>0$，即 $s>5$，从而严格排除较小根，答案不变. 正数 a,b,c 的代换没有漏解，因为对任意实数 x，可取 $a=x+\sqrt{x^2+1}>0$，另两变量同理.】

第 10 题 · TEAM（55 分）

用图示的 O 型四格骨牌、T 型四格骨牌和 L 型三格骨牌铺满一个 2×199 的方格板，设铺法数为 N. 求 N 除以 128 的余数.（骨牌可以旋转；只要两种铺法在旋转或反射后才相同，就仍视为不同铺法.）



解析.

答案. 44

解法 1

主要思路是先考虑 L 型骨牌在方格板中的位置，再用 O 型和 T 型骨牌唯一地填满其余部分. 图中给出了 2×21 方格板上的一个例子.

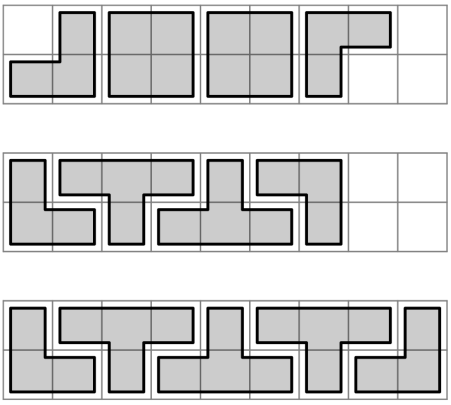


对任意一块 L 型骨牌，考察将它补成 O 型骨牌所缺的那个小格．若该格位于骨牌左侧，就称这块骨牌为 “左缺型”；若位于右侧，就称为 “右缺型”．若两块 L 型骨牌之间没有其他 L 型骨牌，则称它们相邻．

断言 1　相邻的两块 L 型骨牌不能同为左缺型，也不能同为右缺型．

证明　按左边那块 L 型骨牌的朝向分类．

- 若它为左缺型，则两块 L 型骨牌之间只能放 O 型骨牌．为了与这些 O 型骨牌拼合，右边那块 L 型骨牌必须为右缺型．这对应下图第一种情形．
- 若它为右缺型，则两块 L 型骨牌之间只能放 T 型骨牌．为了与这些 T 型骨牌拼合，右边那块 L 型骨牌必须为左缺型．这对应下图另外两种情形．



最左边的 L 型骨牌必为右缺型，因为它左侧只能有 O 型骨牌．同理，最右边的 L 型骨牌必为左缺型，因为它右侧也只能有 O 型骨牌．因此，可以把所有 L 型骨牌依次两两配对，每对左边为右缺型、右边为左缺型．同一对的两块 L 型骨牌之间只出现 T 型骨牌，而不同配对之间只出现 O 型骨牌．第一幅图中的红色矩形框标出了这些配对．

断言 2　同一对中的两块 L 型骨牌围出一个 $2 \times m$ 矩形（包含这两块 L 型骨牌本身），其中 m 是奇数；其间空间用 T 型骨牌填满的方法唯一．

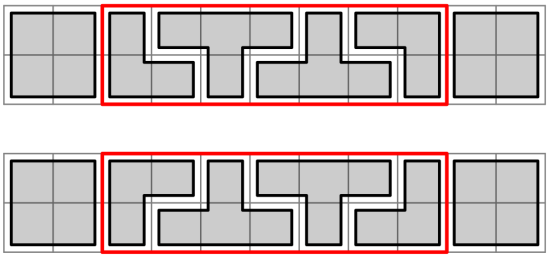
证明　由断言 1 的证明，这一区域只能用 T 型骨牌填充．左边那块 L 型骨牌右侧紧接的 T 型骨牌位置唯一，因为它必须填上 L 型骨牌留下的缺口．下一块 T 型骨牌同样由第一块 T 型骨牌留下的缺口唯一确定．如此继续，直到到达本对中的另一块 L 型骨牌，所以填法唯一．若用了 k 块 T 型骨牌，则整个矩形面积为 $4k+6$，故 $m = 2k+3$ 为奇数．

断言 3　若相邻的两块 L 型骨牌不属于同一对，则它们之间围出一个 $2 \times m$ 矩形（不包含两块 L 型骨牌本身），其中 m 为偶数；该区域用 O 型骨牌填满的方法唯一．

证明　与前一断言相同，此区域只能放 O 型骨牌，显然只有一种填法．若用了 k 块 O 型骨牌，则面积为 $4k$，所以 $m = 2k$ 为偶数．

将各列从左到右编号为 $1, 2, \ldots, 199$，以一块 L 型骨牌最左侧小格所在的列号作为它的位置．由前两个断言，同一对中两块 L 型骨牌的位置奇偶性相反，而不属于同一对的相邻 L 型骨牌的位置奇偶性相同．

假设共有 ℓ 对 L 型骨牌．在它们的位置确定后，每一对所围出的矩形块都有两种上下朝向，因此共有 2^{ℓ} 种铺法．图中展示了同一组位置对应的两种朝向．



下面计算有 ℓ 对 L 型骨牌时，各位置的选择数．从左到右记这些位置为 $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_\ell, b_\ell$．由上述断言，

$$b_i - a_i \equiv 1 \pmod 2, \qquad a_{i+1} - b_i \equiv 0 \pmod 2.$$

因此 a_i 与 a_{i+1} 的奇偶性相反．又因为最左边的 L 型骨牌左侧只能铺 O 型骨牌，所以 a_1 为奇数．类似地，b_ℓ 为偶数，故 a_ℓ 也为奇数．于是 a_1, a_ℓ 奇偶性相同，说明 ℓ 为奇数．

对 $1 \le i \le \ell$ 和 $0 \le j \le \ell$，定义

$$c_i = \frac{b_i - a_i - 1}{2}, \qquad d_j = \frac{a_{j+1} - b_j - 2}{2},$$

其中约定 $b_0 = -1, a_{\ell+1} = 200$．这些量分别表示每对相邻 L 型骨牌之间的骨牌数，以及最左、最右两端的骨牌数．每个 c_i, d_j 都是非负整数，且

$$\begin{aligned} d_0 + c_1 + d_1 + \cdots + c_\ell + d_\ell &= \frac{(a_{\ell+1} - b_0) - 2(\ell+1) - \ell}{2} \\ &= \frac{199 - 3\ell}{2} \end{aligned}$$

由隔板法，这 $2\ell + 1$ 个非负整数的选法数为

$$\binom{\frac{199+\ell}{2}}{2\ell}.$$

每种选择都可实现为铺法，因为奇偶性条件保证各个 L 型骨牌之间的区域可以用相应的四格骨牌填满．每种位置选择产生 2^ℓ 种铺法．对正奇数 ℓ 求和，得到

$$N = \sum_{\substack{\ell \ge 1 \\ \ell \text{ 为奇数}}} 2^\ell \binom{\frac{199+\ell}{2}}{2\ell} = 2^1 \binom{100}{2} + 2^3 \binom{101}{6} + 2^5 \binom{102}{10} + \cdots.$$

其中只有 $3\ell \le 199$ 的项可能非零．模 128 时，前三项之后的各项都为 0．事实上，检查二项式系数中的因子 2 的个数，还能说明第二、第三项也都为 0．记 ν_2 为 2 进赋值，则

$$\nu_2\left(\binom{101}{6}\right) = \nu_2(101!) - \nu_2(6!) - \nu_2(95!) = 97 - 4 - 89 = 4,$$

以及

$$\nu_2\left(\binom{102}{10}\right)=\nu_2(102!)-\nu_2(10!)-\nu_2(92!)=98-8-88=2.$$

所以 $2^7=128$ 同时整除 $2^3\binom{101}{6}$ 与 $2^5\binom{102}{10}$. 【译注：官方第二个赋值式误写成 $\nu_2(101!)-\nu_2(10!)-\nu_2(91!)=97-8-86=3$. 正确式应如上，赋值为 2；加上外面的 2^5 后仍恰好含至少 7 个因子 2，不影响结论.】

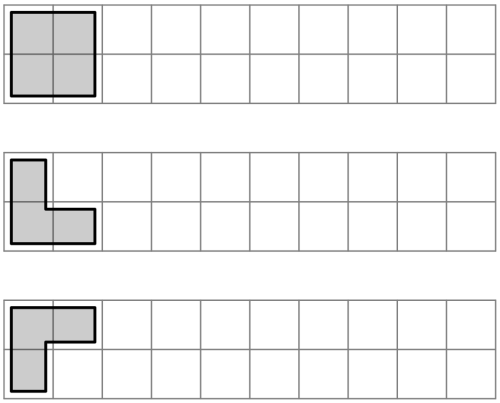
故只须计算 $2^1\binom{100}{2}=100\cdot 99=9900$ 模 128 的余数，得到答案 44.

解法 2

我们求 $2\times n$ 方格板铺法数的生成函数. 设 a_n 为完整 $2\times n$ 方格板的铺法数，b_n 为最左列删去一个指定小格后的铺法数. 两种缺格位置上下对称，铺法数相同. 下面建立 a_n, b_n 的递推关系.

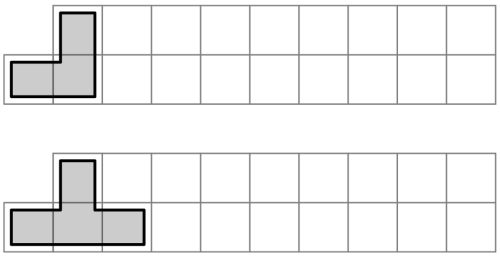
先计算 a_n. 完整方格板最左端的骨牌只能是 O 型或 L 型. 若为 O 型，余下一个 $2\times(n-2)$ 的矩形，共有 a_{n-2} 种铺法. 若为 L 型，它有两种朝向，每种都留下一个首列缺一格的 $2\times(n-1)$ 方格板，共有 $2b_{n-1}$ 种铺法. 因此

$$a_n=a_{n-2}+2b_{n-1}.$$



再计算 b_n. 首列缺一格时，最左端的骨牌只能是 T 型或 L 型. 若为 L 型，剩下完整的 $2\times(n-2)$ 矩形，有 a_{n-2} 种铺法；若为 T 型，则剩下首列缺一格的 $2\times(n-2)$ 方格板，有 b_{n-2} 种铺法. 于是

$$b_n=a_{n-2}+b_{n-2}.$$



【译注：官方先列 “T 型或 L 型”，随后却将 “前者” 和 “后者” 的剩余形状对调．上述文字按图和递推式明确订正；原递推式本身正确．】

由 b_{n-1} 的递推式，$a_{n-3}=b_{n-1}-b_{n-3}$．用 a_n 的递推式减去 a_{n-2} 的递推式，得到

$$\begin{aligned}&(a_n-a_{n-2}-2b_{n-1})-(a_{n-2}-a_{n-4}-2b_{n-3})=0\\ \Longrightarrow\ &a_n-2a_{n-2}+a_{n-4}-2(b_{n-1}-b_{n-3})=0\\ \Longrightarrow\ &a_n-2a_{n-2}+a_{n-4}-2a_{n-3}=0\\ \Longrightarrow\ &a_n-2a_{n-2}-2a_{n-3}+a_{n-4}=0\end{aligned}$$

这是一个四阶线性递推．由初始值 $a_0=1,a_1=0,b_0=0,b_1=0$ 以及上面的联立递推，可得到下表中的初始项：

n	a_n	b_n
0	1	0
1	0	0
2	1	1
3	2	

【译注：官方说 “前 3 项”，但表中列出了 a_0 至 a_3 共四项；最后一个 b_n 单元格原文为空，保留为空．】

递推的特征多项式为 x^4-2x^2-2x+1，所以生成函数形如

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots=\frac{P(x)}{1-2x^2-2x^3+x^4},$$

其中 $P(x)$ 是次数不超过 3 的多项式．由初始项，

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{1-2x^2-2x^3+x^4}&\equiv 1+x^2+2x^3 \pmod{x^4},\\ P(x)&\equiv(1+x^2+2x^3)(1-2x^2-2x^3+x^4) \pmod{x^4},\\ P(x)&\equiv 1-x^2 \pmod{x^4},\\ P(x)&=1-x^2\end{aligned}$$

【译注：官方前两行都将 $1+x^2+2x^3$ 误印为 $1+x+2x^3$；此处按初始值及下一行订正．】

剩下只须求 $\dfrac{1-x^2}{1-2x^2-2x^3+x^4}$ 中 x^{199} 的系数模 128 的值．关键变形为

$$\begin{aligned}\frac{1-x^2}{1-2x^2-2x^3+x^4}&=\frac{1-x^2}{(1-x^2)^2-2x^3}\\ &=\frac{\frac{1}{1-x^2}}{1-\frac{2x^3}{(1-x^2)^2}}\\ &=\frac{1}{1-x^2}+\frac{2x^3}{(1-x^2)^3}+\frac{4x^6}{(1-x^2)^5}+\cdots\end{aligned}$$

【译注：官方本段行内提示式与这个陈列式的首个分母漏写系数 2，印成 $1-x^2-2x^3+x^4$；由已求得的生成函数及右侧 $(1-x^2)^2-2x^3$，正确分母是 $1-2x^2-2x^3+x^4$.】

模 128 时，只须保留展开式的前七项．此外，$\dfrac{1}{(1-x^2)^n}$ 只含偶次幂，因此 $\dfrac{x^m}{(1-x^2)^n}$ 的各项次数与 m 同奇偶．故只有分子幂次为奇数的项会对 x^{199} 的系数有贡献.

在 $\dfrac{1}{(1-x^2)^k}$ 中，x^{2n} 的系数为 $\binom{n+k-1}{k-1}$．所以所求系数为

$$\begin{aligned}&2^1\binom{\frac{199-3}{2}+2}{2}+2^3\binom{\frac{199-9}{2}+6}{6}+2^5\binom{\frac{199-15}{2}+10}{10}+\cdots\\&=2^1\binom{100}{2}+2^3\binom{101}{6}+2^5\binom{102}{10}+\cdots\end{aligned}$$

沿用解法 1 最后的模运算，再次得到答案 44.

题目 · Guts（团队限时轮）

第 1 题 · GUTS（5 分）

在下图的 1×9 方格中，每格填一个非负的一位整数，使任意相邻两格内的数之积都能被 6 整除. 求九个数之和的最小值.

?	6	1	?	0	2	?	?	3

解析.

答案. 12

将四个未知格全部填为 0，得到下图.

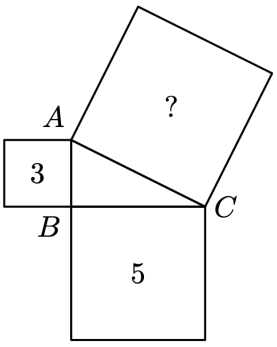
0	6	1	0	0	2	0	0	3

任意相邻两数之积都是 0 或 6，均能被 6 整除，故这样的填写符合要求. 又因为 0 是最小的非负一位整数，所以任何其他填写都不会使总和更小. 所求最小值为

$$6+1+0+2+3=12.$$

第 2 题 · GUTS（5 分）

如图，分别以直角三角形 ABC 的三条边为边向外作正方形. 以直角边 AB、BC 为边的正方形的周长分别为 3、5. 求以斜边 AC 为边的正方形的周长.



解析.

答案. $\sqrt{34}$

由周长可知 $AB=\dfrac{3}{4}$、$BC=\dfrac{5}{4}$. 由勾股定理，

$$AC=\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{5}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{34}}{4}.$$

所以第三个正方形的周长为 $4AC=\sqrt{34}$.

第 3 题 · GUTS（5 分）

求由三个字母 A、三个字母 B 和三个字母 C 组成的九字母字符串的个数，要求每个 A 都与另一个 A 直接相邻，每个 B 都与另一个 B 直接相邻，每个 C 都与另一个 C 直接相邻.

解析.

答案. 6

三个 A 必须连续出现. 否则它们被分成至少两段，其中至少一段只有一个 A，这个 A 就没有直接相邻的 A，与要求矛盾.

同理，三个 B 和三个 C 也分别连续. 所以所有满足要求的字符串恰好是将三个字母块 AAA、BBB、CCC 按任意顺序拼接得到的字符串，共 $3! = 6$ 个，且这些字符串确实都满足条件.

第 4 题 · GUTS（6 分）

求最大的两位正整数 $\overline{ab}$，使 $\overline{ab} + \overline{ba}$ 为完全平方数.

解析.

答案. 92

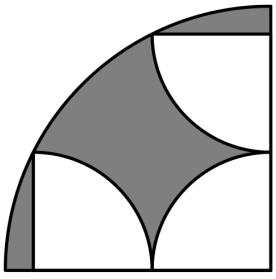
因为 $\overline{ab} = 10a + b$、$\overline{ba} = 10b + a$，所以

$$\overline{ab} + \overline{ba} = 11(a + b).$$

这里 $1 \leq a + b \leq 18$. 由于 11 为素数，$11(a + b)$ 为平方数要求 $11 \mid a + b$，故只能有 $a + b = 11$. 为使 $\overline{ab}$ 最大，应使 a 尽可能大，于是 $(a, b) = (9, 2)$，得到 92. 检验可知 $92 + 29 = 121 = 11^2$，确实符合要求.

第 5 题 · GUTS（6 分）

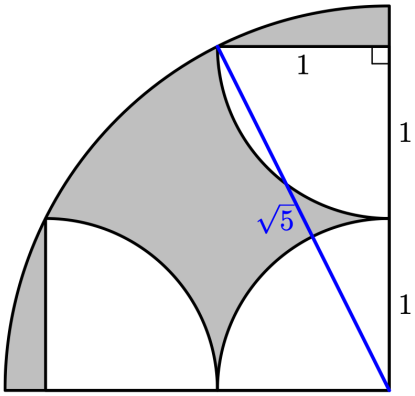
如图，三个半径为 1 的四分之一圆置于一个较大的四分之一圆内. 求阴影部分的面积.



解析.

答案. $\dfrac{\pi}{2}$

如下图，外侧四分之一圆的半径是直角边长为 1 和 2 的直角三角形的斜边，故为 $\sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$.



所以大四分之一圆的面积为 $\frac{1}{4}\pi(\sqrt{5})^2=\frac{5\pi}{4}$，每个白色四分之一圆的面积为 $\frac{1}{4}\pi\cdot 1^2=\frac{\pi}{4}$. 相减得到阴影面积

$$\frac{5\pi}{4}-3\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}.$$

第 6 题 · GUTS（6 分）

白雪公主与七个小矮人围坐一圈，面向圆心. 最初白雪公主持有一个装着 100 个苹果的篮子，其中 1 个有毒，其余无毒. 每分钟，持篮者从篮中剩余的苹果中等可能地随机选取一个吃掉，再将篮子递给左边的人. 各次选择独立进行，这个过程在有人吃到毒苹果时停止. 求白雪公主没有吃到毒苹果的概率.

解析.

答案. $\frac{87}{100}$

设吃到毒苹果后仍继续传递和吃苹果，直到所有苹果都被吃完. 这样的延长不会改变白雪公主是否吃到毒苹果.

在延长后的过程中，白雪公主共吃 $\left\lceil\frac{100}{8}\right\rceil=13$ 个苹果. 毒苹果等可能地位于吃苹果顺序中的任意位置，所以她吃到毒苹果的概率为 $\frac{13}{100}$. 所求概率为

$$1-\frac{13}{100}=\frac{87}{100}.$$

第 7 题 · GUTS（7 分）

实系数二次多项式 $P(x)$ 满足 $P(10)-P(1)-P(9)=62$ 及 $P(10)-P(2)-P(8)=118$. 求 $P(10)-P(3)-P(7)$.

解析.

答案. 158

设 $P(x)=Ax^2+Bx+C$，其中 A,B,C 为实数. 对任意实数 m,n，有

$$\begin{aligned} P(m+n)-P(m)-P(n) &= A\big((m+n)^2-m^2-n^2\big) \\ &\quad + B(m+n-m-n)+C-C-C \\ &= 2Amn-C\,. \end{aligned}$$

分别代入 $(m,n)=(1,9)$ 和 $(2,8)$，得

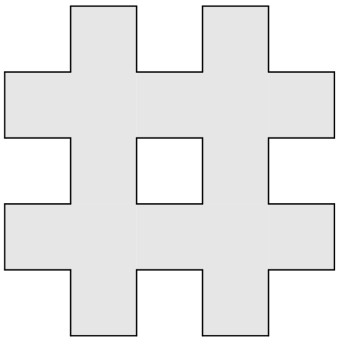
$$18A-C=62,\qquad 32A-C=118,$$

解得 $A=4$、$C=10$. 因此

$$P(10)-P(3)-P(7)=2\cdot 4\cdot 3\cdot 7-10=158.$$

第 8 题 · GUTS（7 分）

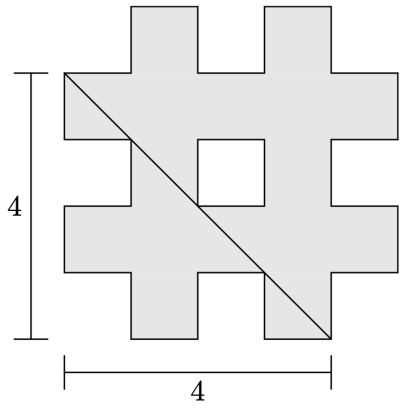
Jason 将一个 5×5 正方形分成 25 个单位正方形，并去掉其中 9 个，得到下图的 “井” 字形区域. 他在该区域内画一条线段，允许线段接触区域边界. 求这条线段可能的最大长度.



解析.

答案. $4\sqrt{2}$

答案是 $4\sqrt{2}$. 下图给出一种构造：线段的水平跨度和竖直跨度都是 4，故长度为 $\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$.

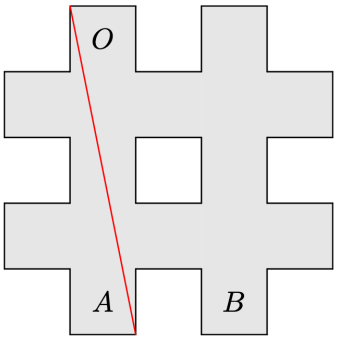


下面证明不可能更长. 反设存在长度大于 $4\sqrt{2}$ 的合法线段.

断言一. 该线段或者连接最左列与最右列的方格，或者连接最上行与最下行的方格.

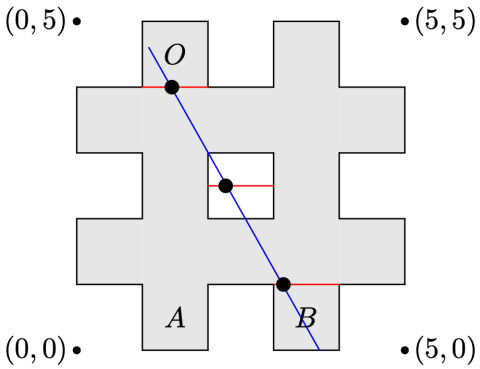
若水平、竖直跨度都不超过 4，其长度就不超过 $\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$. 所以至少有一个跨度大于 4. 水平跨度大于 4 时必须跨过全部五列，竖直跨度大于 4 时必须跨过全部五行，从而断言成立.

利用图形的旋转对称性，不妨设两个端点分别位于最上行、最下行. 再作左右反射，可设上端点位于上方左侧的方格 O. 下端点只能位于方格 A 或 B，如图所示.



若下端点位于 A，那么最长的候选线段连接 O,A 的一对对角顶点，即图中的红线段，长度为 $\sqrt{5^2+1^2}=\sqrt{26}<4\sqrt{2}$，不合假设.

断言二. 任何从 O 连接到 B 且试图留在“井”字形内的线段，都会穿过中央空洞，因而不合法.



如图建立坐标系，使原正方形顶点为 $(0,0)$、$(0,5)$、$(5,0)$、$(5,5)$. 一条位于区域内、从 O 连向 B 的线段，必须经过 O 的下边及 B 的上边，故经过两点 $(x_1,4)$ 和 $(x_2,1)$，其中

$$1\le x_1\le 2,\qquad 3\le x_2\le 4.$$

其中点为 $\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{5}{2}\right)$，且 $2\le\dfrac{x_1+x_2}{2}\le 3$，所以中点在中央空洞内部或其两条竖直边界上. 又因 $x_1<x_2$，线段不是竖直的，即使中点恰在边界，也必穿过空洞内部. 断言二成立.

所有情形均导致矛盾，因此所求最大值就是 $4\sqrt{2}$.

第 9 题 · GUTS（7 分）

Hannah 有 16 支颜色各不相同的彩色铅笔，它们构成 8 对互补色．她随机给一面由三条水平色带构成的旗帜涂色，要求三条色带颜色两两不同．求任意相邻两条色带都不是互补色的概率.

解析.

答案. $\dfrac{13}{15}$

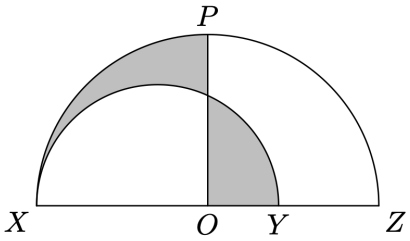
因为三条色带的颜色两两不同，而每种颜色只有一种互补色，所以三条色带中至多出现一对互补色.

共有两对相邻色带．对任意一对，固定其中一条的颜色后，另一条等可能地取剩余 15 种颜色中的一种，恰有一种与前者互补，所以这一对互补的概率为 $\dfrac{1}{15}$．两对相邻色带同时互补是不可能的，故至少有一对相邻互补的概率为 $\dfrac{2}{15}$．所求概率为

$$1-\frac{2}{15}=\frac{13}{15}.$$

第 10 题 · GUTS（8 分）

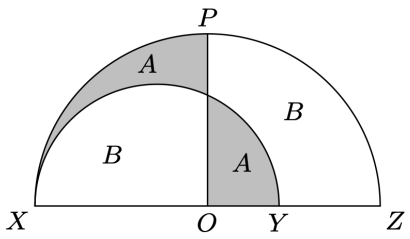
如图，以 XY 为直径的小半圆位于以 XZ 为直径的大半圆内，半径 OP 将大半圆分成两个全等的四分之一圆．两块阴影区域的面积相等．已知 $XZ=10$，求 XY.



解析.

答案. $5\sqrt{2}$

由于左右两个四分之一圆面积相等，而各自包含的阴影面积相等，所以两块非阴影区域的面积也相等．设每块阴影面积为 A，每块非阴影面积为 B，如图.



小半圆面积为 $A+B$，大半圆面积为 $2A+2B$，因此大半圆面积是小半圆的两倍，直径为小半圆直径的 $\sqrt{2}$ 倍．所以

$$10=XZ=\sqrt{2}\,XY \quad\Longrightarrow\quad XY=\frac{10}{\sqrt{2}}=5\sqrt{2}.$$

第 11 题 · GUTS（8 分）

Mark 将一枚公平的六面骰子掷 6 次，按顺序记录点数，组成一个六位数. 求这个数是 15 的倍数的概率.

解析.

答案. $\dfrac{1}{18}$

一个整数被 15 整除，当且仅当它同时被 3 和 5 整除. 由于每位只能是 1 至 6，能被 5 整除当且仅当末位为 5，概率为 $\dfrac{1}{6}$.

固定后五位之后，首位的六种可能值中总有恰好两种使各位数字和被 3 整除，故所得数能被 3 整除的条件概率恒为 $\dfrac{1}{3}$，与是否被 5 整除无关. 所以所求概率为

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{18}.$$

第 12 题 · GUTS（8 分）

求最小的正整数 $n\geq 5$，使下列五个整除关系同时成立：

$$\binom{n}{0}\mid\binom{n}{1},\quad \binom{n}{1}\mid\binom{n}{2},\quad \binom{n}{2}\mid\binom{n}{3},\quad \binom{n}{3}\mid\binom{n}{4},\quad \binom{n}{4}\mid\binom{n}{5}.$$

解析.

答案. 59

条件 $\binom{n}{k}\mid\binom{n}{k+1}$ 等价于比值为整数. 由

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

可得

$$\frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}}=\frac{n-k}{k+1}.$$

又因为 $\dfrac{n-k}{k+1}+1=\dfrac{n+1}{k+1}$，这个比值为整数当且仅当 $k+1\mid n+1$. $k=0$ 时自动成立，$k=1,2,3,4$ 时要求

$$\operatorname{lcm}(2,3,4,5)=60\mid n+1.$$

所以最小值为 $n=60-1=59$.

第 13 题 · GUTS（9 分）

一条环形项链由 20 颗红珠和 30 颗绿珠串成. Stella 将其切成珠数相等的两半，并取走其中一半. 已知对所有切法而言，她所取的一半中红珠数的最小值为 6，绿珠数的最小值为 N. 在所有满足条件的珠子排列中，求 N 的最大可能值.

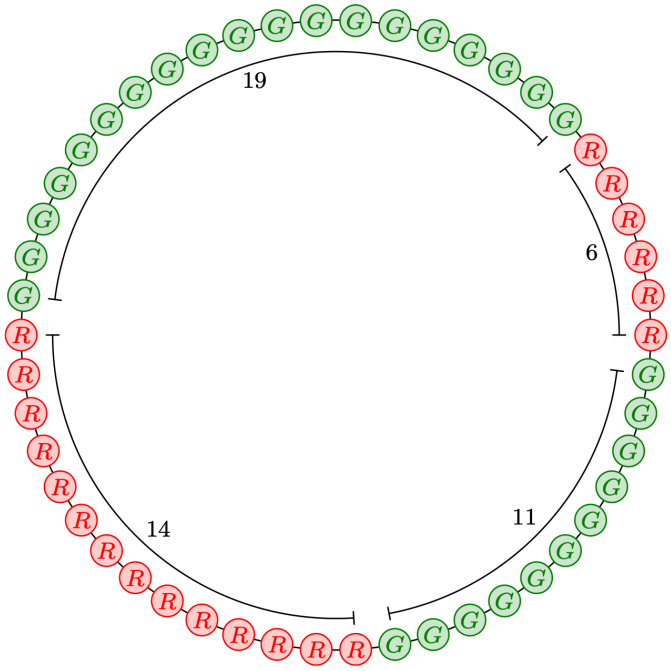
解析.

答案. 11

每半条项链有 25 颗珠子，所以半条项链中绿珠数的最大值为 $25-6=19$. 如果一半的绿珠数最多，则另一半的绿珠数最少，故

$$N=30-19=11.$$

注. 满足条件的排列确实存在，官方给出的例子如下. 沿圆周依次是 19 颗绿珠、6 颗红珠、11 颗绿珠、14 颗红珠；图中 G 表示绿珠，R 表示红珠.



第 14 题 · GUTS（9 分）

实数 a_1,a_2,a_3,a_4 成等比数列，且 $a_2+a_3=20$、$a_1+a_4=26$. 求 $\sqrt[3]{a_1}+\sqrt[3]{a_4}$.

解析.

答案. $\sqrt[3]{86}$

设公比为 r. 由等比数列关系可得

$$a_1^2a_4=a_2^3,\qquad a_1a_4^2=a_3^3.$$

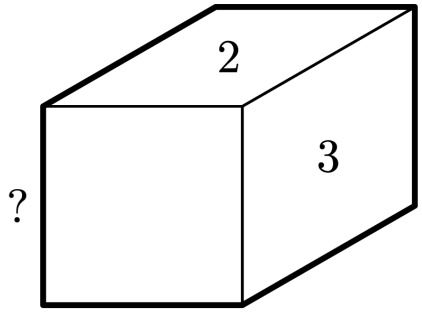
例如 $a_2=a_1r$、$a_3=a_1r^2$、$a_4=a_1r^3$，代入即可验证这两个等式. 于是

$$\begin{aligned}(\sqrt[3]{a_1}+\sqrt[3]{a_4})^3 &= a_1+3\sqrt[3]{a_1^2a_4}+3\sqrt[3]{a_1a_4^2}+a_4\\ &= a_1+3a_2+3a_3+a_4\\ &= (a_1+a_4)+3(a_2+a_3)\\ &= 26+3\cdot 20=86\,.\end{aligned}$$

取实立方根，得所求值 $\sqrt[3]{86}$.

第 15 题 · GUTS（9 分）

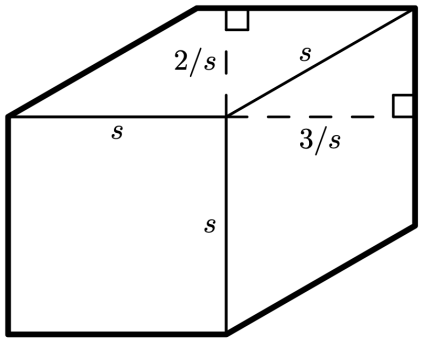
如图，一个等边六边形被分成一个正方形和两个菱形．已知两个菱形的面积分别为 2 和 3，求这个六边形的边长.



解析.

答案. $\sqrt[4]{13}$

设边长为 s．将正方形的两条边延长到六边形的边界，如图．上方菱形的面积为 2，底为 s，故高为 $\dfrac{2}{s}$；右方菱形同理，其高为 $\dfrac{3}{s}$.



图中边长为 $\dfrac{2}{s}$、$\dfrac{3}{s}$ 的矩形，其对角线长恰为 s．由勾股定理，

$$\left(\frac{2}{s}\right)^2+\left(\frac{3}{s}\right)^2=s^2 \quad\Longrightarrow\quad s^4=13.$$

所以边长为 $s=\sqrt[4]{13}$.

第 16 题 · GUTS（10 分）

设 N 是满足下列条件的最小正整数：$2026 \mid N$，且对 N 的任意正因数 k，k 的正因数个数也是 N 的因数. 求 $\dfrac{N}{2026}$.

解析.

答案. 240

记 $\tau(k)$ 为正整数 k 的正因数个数. 若 a, b 都是 N 的因数，则 $\operatorname{lcm}(a,b)$ 也是 N 的因数. 反复利用这一点：

- $2026 = 2 \cdot 1013$，其中 1013 为素数，所以 $\tau(2026) = 4$，从而 $4 \mid N$.
- $\tau(4) = 3$，所以 $3 \mid N$，进而 $2 \cdot 3 \cdot 1013 \mid N$.
- $\tau(2 \cdot 3 \cdot 1013) = 8$，所以 $8 \mid N$，进而 $2^3 \cdot 3 \cdot 1013 \mid N$.
- $\tau(2^3 \cdot 3 \cdot 1013) = 16$，所以 $16 \mid N$.
- $\tau(16) = 5$，所以 $5 \mid N$，从而 $2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 1013 \mid N$.
- $\tau(2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 1013) = 32$，所以 $32 \mid N$.

综合以上条件，必有 $2^5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 1013 \mid N$.

下面证明 $N_0 = 2^5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 1013$ 本身符合条件. 其任意正因数均可写为 $k = 2^a 3^b 5^c 1013^d$，其中 $0 \le a \le 5$，$b, c, d \in \{0, 1\}$. 于是

$$\tau(k) = (a+1)(b+1)(c+1)(d+1) = 2^r (a+1),$$

这里 r 是 b, c, d 中等于 1 的个数，所以 $0 \le r \le 3$，且 $1 \le a+1 \le 6$. 因此 $\tau(k)$ 只能含素因子 $2, 3, 5$，其指数分别不超过 $5, 1, 1$，故 $\tau(k) \mid N_0$.

所以 N_0 满足条件，且前面已证明任何可行 N 都是其倍数，故它就是最小值. 最后

$$\frac{N}{2026} = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 = 240.$$

第 17 题 · GUTS（10 分）

星期一，Steve 在黑板上写下一个非零的一位数，且它是 4 的倍数. 之后每天，他都在当前数的任意位置插入一个非零数字，可以插在最前面、中间或最后面，并要求新数仍是 4 的倍数. 求星期四黑板上可能出现的四位数的个数.

解析.

答案. 648

断言. 每天黑板上这个数的末位数字都能被 4 整除.

用归纳法证明. 第一天由题设显然成立. 假设某天末位为 x，且 $4 \mid x$. 若下一天将数字插在前面或中间，末位仍是 x；若在末尾插入 y，新数被 4 整除意味着 $4 \mid 10x + y$，由 $4 \mid x$ 得 $4 \mid y$. 断言得证.

设星期四的数为 $\overline{abcd}$. 断言给出 $d \in \{4,8\}$. 又由 $4 \mid 10c+d$ 可得 c 为偶数，且非零，所以 $c \in \{2,4,6,8\}$.

反过来，所有满足上述条件且各位非零的 $\overline{abcd}$ 均可达到：星期一写 d，星期二在前面插入 c，星期三在前面插入 b，星期四再在前面插入 a. 过程中的数始终被 4 整除.

因此 d 有 2 种选择，c 有 4 种选择，a,b 各有 9 种选择，所求个数为 $2\cdot 4\cdot 9\cdot 9=648$.

第 18 题 · GUTS（10 分）

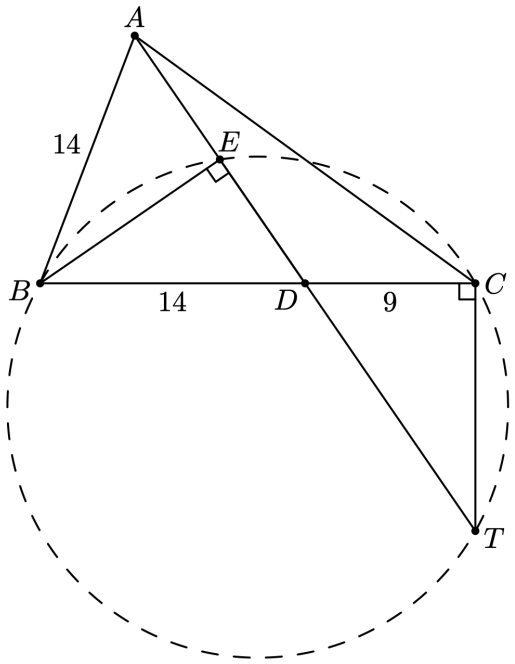
点 D 在线段 BC 上，ABC 为三角形，且 $AB=BD=14$、$DC=9$. 点 T 在直线 AD 上，满足 $\angle BCT=90^\circ$，且 D 位于 A,T 之间. 求 AT 的最小可能值.

解析.

答案. $12\sqrt{7}$

从 B 向 AD 作垂线，垂足为 E. 如下图，由 $\angle BED=\angle TCD=90^\circ$ 可知 B,E,C,T 四点共圆. 由点 D 对该圆的幂，

$$ED\cdot DT=BD\cdot DC=14\cdot 9=126.$$



因为 $\triangle ABD$ 是等腰三角形，垂足 E 是底边 AD 的中点，所以 $AD=2ED$. 由算术—几何平均不等式，

$$\frac{AD+DT}{2}\geq\sqrt{AD\cdot DT}=\sqrt{2ED\cdot DT}=\sqrt{252}=6\sqrt{7}.$$

因此 $AT=AD+DT\geq 12\sqrt{7}$. 等号当且仅当 $AD=DT$ 成立.

最后说明等号可以达到. 设 C' 为 C 关于 D 的对称点，选择点 A，使其向 BC 所作垂线的垂足恰为 C'. 因为 $BC'=BD-DC=5<14=AB$，这样的点 A 存在. 此时

$$\angle AC'D=\angle TCD=90^\circ,\qquad \angle ADC'=\angle TDC,\qquad C'D=CD,$$

所以 $\triangle ADC'\cong\triangle TDC$，从而 $AD=DT$. 所求最小值为 $12\sqrt{7}$.

译注. 原解最后将全等式右端的三角形符号误排为角符号，此处已按上下文改正.

第 19 题 · GUTS（11 分）

四个正的最简分数 $\frac{a_1}{a_2}$、$\frac{b_1}{b_2}$、$\frac{c_1}{c_2}$、$\frac{d_1}{d_2}$ 满足

$$\frac{a_1}{a_2}\cdot\frac{b_1}{b_2}\cdot\frac{c_1}{c_2}=\frac{d_1}{d_2}.$$

已知 $a_1a_2=720$、$b_1b_2=108$、$c_1c_2=250$，求 d_1d_2 的最小可能值.

解析.

答案. 150

解法一：逐个考察素因子的指数.

先分解质因数：

$$720=2^4\cdot3^2\cdot5,\qquad 108=2^2\cdot3^3,\qquad 250=2\cdot5^3.$$

由于 a_1,a_2 互素，因子 2^4 必须完整地出现在分子或分母一侧，所以 $\frac{a_1}{a_2}$ 对乘积中 2 的指数的贡献为 4 或 -4. 同理，另两个分数的贡献分别为 ±2 和 ±1.

因此，约分后 $\frac{d_1}{d_2}$ 中 2 的指数为 $\pm4\pm2\pm1$，而 d_1d_2 中相应指数为其绝对值，最小为 $4-2-1=1$.

同理：

- 素因子 3 对应指数为 $\pm2\pm3\pm0$，绝对值最小为 $-2+3=1$.
- 素因子 5 对应指数为 $\pm1\pm0\pm3$，绝对值最小为 $-1+3=2$.

所以 $d_1d_2\geq2\cdot3\cdot5^2=150$. 下列构造同时达到各个下界：

$$\frac{2^4}{3^2\cdot5}\cdot\frac{3^3}{2^2}\cdot\frac{5^3}{2}=\frac{2\cdot3\cdot5^2}{1}=150.$$

故最小值为 150.

解法二：使用素数赋值.

对素数 p 及非零有理数 x，记 $\nu_p(x)$ 为 x 的分子中 p 的指数减去分母中 p 的指数. 例如 $\nu_2(\frac{1}{12})=-2$，$\nu_2(720)=4$.

译注. 原文将这个定义写成“使 $p^{-k}x$ 为整数的最大整数 k”. 对一般有理数这并不成立，例如 $x=\frac{1}{12},p=2$ 时不存在这样的整数 k. 此处采用其后全部计算实际使用的标准素数赋值定义，并将定义域限定为非零有理数.

我们使用以下性质：

1. $\nu_p(xy)=\nu_p(x)+\nu_p(y)$.
2. $\nu_p(\dfrac{1}{x})=-\nu_p(x)$，因为 $\nu_p(x)+\nu_p(\dfrac{1}{x})=\nu_p(1)=0$.
3. 若正整数 x_1,x_2 互素，则 $\nu_p(x_1),\nu_p(x_2)$ 中至少一个为零，另一个等于 $\nu_p(x_1x_2)$. 这是因为两个指数不可能同时为正，且它们之和为 $\nu_p(x_1x_2)$.

由第三条及乘法、倒数性质，有

$$\begin{aligned}\pm\nu_p(d_1d_2)&=\nu_p(d_1)-\nu_p(d_2)\\&=\nu_p\left(\frac{d_1}{d_2}\right)\\&=\nu_p\left(\frac{a_1}{a_2}\right)+\nu_p\left(\frac{b_1}{b_2}\right)+\nu_p\left(\frac{c_1}{c_2}\right)\\&=[\nu_p(a_1)-\nu_p(a_2)]+[\nu_p(b_1)-\nu_p(b_2)]+[\nu_p(c_1)-\nu_p(c_2)]\\&=\pm\nu_p(a_1a_2)\pm\nu_p(b_1b_2)\pm\nu_p(c_1c_2)\,.\end{aligned}$$

为使 d_1d_2 最小，应对每个素数分别使其非负指数最小. 于是

$$\begin{aligned}\nu_2(d_1d_2)&=|\pm4\pm2\pm1|\geq1,\\\nu_3(d_1d_2)&=|\pm2\pm3\pm0|\geq1,\\\nu_5(d_1d_2)&=|\pm1\pm0\pm3|\geq2\,.\end{aligned}$$

因此

$$d_1d_2\geq2^{\nu_2(d_1d_2)}3^{\nu_3(d_1d_2)}5^{\nu_5(d_1d_2)}\geq2\cdot3\cdot5^2=150.$$

取 $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{16}{45}$、$\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{27}{4}$、$\dfrac{c_1}{c_2}=\dfrac{125}{2}$，则积为 $\dfrac{150}{1}$，达到下界，故所求仍为 150.

第 20 题 · GUTS（11 分）

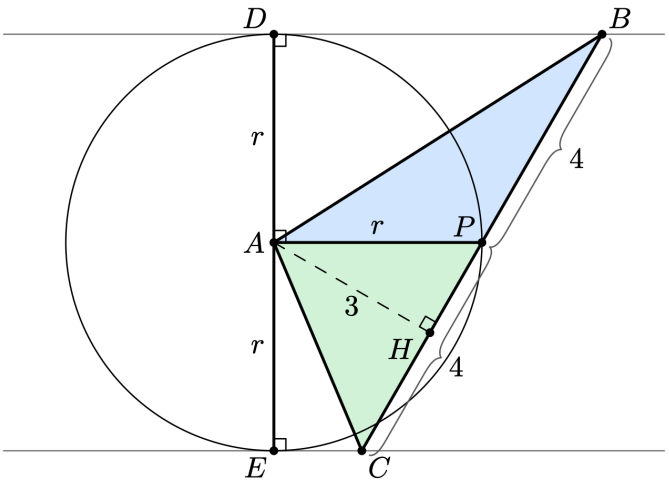
在三角形 ABC 中，$BC=8$. 圆 ω 以 A 为圆心，并经过边 BC 的中点. 已知过 B、C 分别可以作圆 ω 的两条互相平行的切线，且点 A 到直线 BC 的距离为 3. 求圆 ω 的半径.

解析.

答案. $2\sqrt{3}$

设圆的半径为 r，过 B,C 的两条平行切线分别与圆相切于 D,E. 则 $BD\parallel CE$，D,A,E 共线，且 A 是 DE 的中点. 四边形 $DECB$ 为直角梯形，$\angle BDE=\angle DEC=90^\circ$.

设 H 为 A 到 BC 的垂足，P 为 BC 的中点. 因为 AP 是梯形 $DECB$ 的中位线，所以 $AP\perp DE$，如下图.



沿 AP 将 $\triangle ABC$ 分成 $\triangle APB$ 和 $\triangle APC$，两者均以长为 r 的 AP 为底，对应高也均为 r. 用 $[ABC]$ 表示三角形面积，可得

$$[ABC] = [ABP] + [APC] = \frac{1}{2}r^2 + \frac{1}{2}r^2 = r^2.$$

另一方面，$[ABC] = \dfrac{1}{2}\,AH \cdot BC = \dfrac{1}{2} \cdot 3 \cdot 8 = 12$，故 $r^2 = 12$，从而 $r = 2\sqrt{3}$.

第 21 题 · GUTS（11 分）

求由字母 A, B 组成的长度为 10 的字符串的个数，要求其形如 ABB 的连续子串个数与形如 BBA 的连续子串个数相等.

解析.

答案. 640

称满足条件的字符串为好串. 关键断言是：一个字符串为好串，当且仅当以下两种情况之一成立：

1. 它既以 BB 开头，也以 BB 结尾.
2. 它既不以 BB 开头，也不以 BB 结尾.

先证明断言. 若串中没有 A，两类子串数均为零；长度至少为 2 时符合第一种情况，更短时符合第二种情况，所以断言成立. 以下假设串中至少有一个 A.

将相同字母的极大连续段称为一个块. 每个 ABB 或 BBA 子串，都对应于其中 BB 所在的、长度至少为 2 的 B 块. 对这样的一个 B 块，有三种情形：

- 它位于两个 A 块之间：在开头恰好贡献一个 ABB，在末尾恰好贡献一个 BBA.
- 它位于整个字符串的开头：其后有 A 块，故只在末尾贡献一个 BBA.
- 它位于整个字符串的结尾：其前有 A 块，故只在开头贡献一个 ABB.

第一种情形总是成对贡献，两种子串的数量相同；第二、第三种情形各至多发生一次. 因此，好串恰好要求第二、第三种情形同时出现或同时不出现，也就是断言所列的两个条件.

满足第一个条件时，首尾各两个字母固定为 BB，中间六个字母任取，共 2^6 个．满足第二个条件时，开头两个字母有 $2^2-1=3$ 种选法，结尾两个字母也有 3 种选法，中间六个字母任取，共 $3\cdot 3\cdot 2^6$ 个．因此答案为

$$2^6(1+3\cdot 3)=640.$$

第 22 题 · GUTS（12 分）

求整数

$$\left\lfloor 10^{99}\cdot\frac{100008}{700007}\right\rfloor$$

的十进制各位数字之和．其中 $\lfloor x\rfloor$ 表示不超过 x 的最大整数.

解析.

答案. 440

因为分数 $\dfrac{100008}{700007}<1$，所求等价于其小数点后前 99 位数字之和．关键分解为

$$\frac{100008}{700007}=\frac{100001}{700007}+\frac{7}{700007}=\frac{1}{7}+\frac{1}{100001}.$$

注意

$$\frac{1}{7}=0.\overline{142857},$$

且

$$\frac{1}{100001}=\frac{1}{10^5+1}=\frac{10^5-1}{10^{10}-1}=0.\overline{0000100000}-0.\overline{0000000001}.$$

因此，在 $\dfrac{1}{7}$ 上加 $\dfrac{1}{100001}$，相当于：

- 在小数点后的第 $5,15,\ldots,95$ 位各加 1；
- 在第 $10,20,\ldots,90$ 位各减 1.

由于 $\dfrac{1}{7}$ 的循环节各位都在 1 至 8 之间，这些操作不会产生进位或借位．故可先求 $\dfrac{1}{7}$ 的前 99 位数字和，再计算增减量.

由 $99=16\cdot 6+3$，前 99 位包括 16 个循环节 142857，每个数字和为 27，末尾再接 142，数字和为 7．总和为 $16\cdot 27+7=439$．加上另一分数后，共有十位各加 1、九位各减 1，所以答案为 $439+10-9=440$.

第 23 题 · GUTS（12 分）

若由互不相同的正整数组成的集合 S 满足：对任意有序三元组 $(a,b,c)\in S^3$（三个元素可以相同），都有 $a\mid bc$，则称 S 为“整除丰富集”. 求最小的正整数 n，使某个恰有 25 个元素的整除丰富集包含 n.

解析.

答案. 720

对正整数 x 和素数 p，记 $\nu_p(x)$ 为满足 $p^k\mid x$ 的最大非负整数 k. 使用以下两点：

- $\nu_p(xy)=\nu_p(x)+\nu_p(y)$.
- $x\mid y$ 当且仅当对每个素数 p 都有 $\nu_p(x)\le\nu_p(y)$.

给定集合 S，令

$$m_p(S)=\min_{x\in S}\nu_p(x),\qquad M_p(S)=\max_{x\in S}\nu_p(x).$$

断言一. S 是整除丰富集，当且仅当对所有素数 p 都有 $M_p(S)\le 2m_p(S)$.

若该不等式成立，则对任意 $a,b,c\in S$，

$$\nu_p(bc)=\nu_p(b)+\nu_p(c)\ge 2m_p(S)\ge M_p(S)\ge\nu_p(a),$$

故 $a\mid bc$. 反之，若某个 p 满足 $M_p(S)>2m_p(S)$，则可取 $a,b\in S$ 分别达到最大、最小指数，于是 $\nu_p(a)>2\nu_p(b)$，从而 $a\nmid b^2$，与题设矛盾.

断言二. 若整除丰富集的最小元素为 n，则其元素个数至多为 $\tau(n)$，其中 $\tau(n)$ 为 n 的正因数个数；反过来，对任意 $1\le N\le\tau(n)$，都存在最小元素为 n、恰有 N 个元素的整除丰富集.

证明第一部分：对每个素数 p，$m_p(S)\le\nu_p(n)$，而每个元素 $k\in S$ 的指数满足

$$m_p(S)\le\nu_p(k)\le M_p(S)\le 2m_p(S).$$

所以该指数至多有 $m_p(S)+1\le\nu_p(n)+1$ 种取值. 对所有素数相乘，得到元素总数至多为 $\prod_p(\nu_p(n)+1)=\tau(n)$.

证明第二部分：先取所有满足 $\nu_p(n)\le\nu_p(k)\le 2\nu_p(n)$ 的正整数 k 组成集合. 也就是说取

$$S'=\{nd:d\mid n\}.$$

它的最小元素是 n，共有 $\tau(n)$ 个元素，且由断言一满足要求. 删除任何元素都不会破坏整除条件，所以保留 n 并删去其他元素，便能得到任意所需大小 $N\le\tau(n)$. 断言二得证.

因此，所求答案就是满足 $\tau(n)\ge 25$ 的最小正整数. 这里可以把题目中的“包含 n”归结为“最小元素为 n”，因为若包含一个更小的元素，该元素本身也会是一个更小的候选答案.

数 $720=2^4\cdot 3^2\cdot 5$ 有 $(4+1)(2+1)(1+1)=30$ 个正因数，所以可行. 下面排除更小的数.

为使 n 最小，所用素数应从 2 开始连续选取，且素数越大，其指数不能越大，否则交换指数就会得到因数个数相同而更小的整数. 因为 $2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11=2310>720$，无需考虑素因子大于 7 的情况. 若含素因子 7，不超过 720 且指数按非增顺序排列的候选只有 $2\cdot3\cdot5\cdot7=210$ 与 $2^2\cdot3\cdot5\cdot7=420$，其因数数分别为 16、24；再提高任一指数就超过 720. 故最优数不含 7.

若 5 的指数至少为 2，则 $n\geq2^2\cdot3^2\cdot5^2=900>720$. 所以只需比较 2^u、2^u3^v、2^u3^v5 三种形式. 各自至少有 25 个因数时的最小值分别为

$$2^{24},\qquad 2^4\cdot3^4=1296,\qquad 2^4\cdot3^2\cdot5=720.$$

其中最小的是 720，即所求答案.

译注. 原文首次定义最大指数时将 $M_p(S)$ 的自变量误排为 x，此处统一为集合 S. 上述三种形式的末步比较，也可通过条件 $u+1\geq25$、$(u+1)(v+1)\geq25$、$2(u+1)(v+1)\geq25$，分别在 $u\geq v\geq1$ 下直接检查得到.

第 24 题 · GUTS（12 分）

Gregasaurus 有一张边长为 1 的正方形纸，其中一个顶点标有红点. 一次折叠包含以下步骤：

1. 选一条经过正方形内部的直线 ℓ，将正方形分成两部分.
2. 任选其中一部分，将其关于 ℓ 反射.

他恰好折叠一次. 求最小区域 R 的面积，使无论怎样折叠，红点都一定落在 R 中.

解析.

答案. $2+2\pi$

设正方形为 $ABCD$，红点在 A. 先观察两个事实：

断言一. 对 $X\neq A$，一次折叠能将 A 移到 X，当且仅当线段 AX 的垂直平分线穿过正方形内部. 这是因为折痕正是点与其反射像连线的垂直平分线.

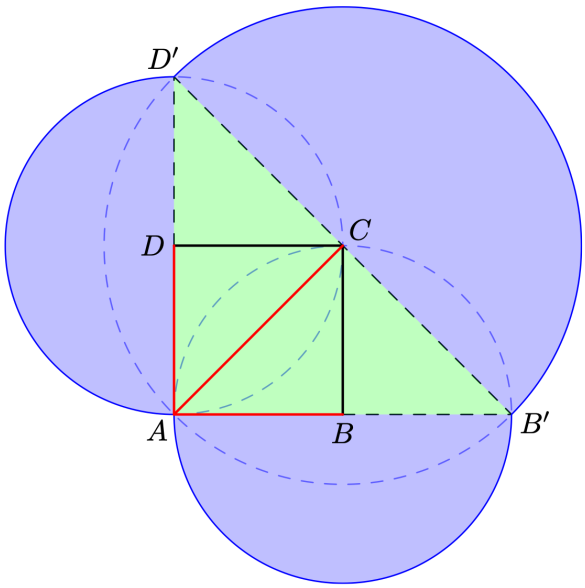
断言二. 一条不经过 A 的直线穿过正方形内部，当且仅当它穿过 AB、AC、AD 中至少一条线段的内部.

令 S 为三条开线段 AB, AC, AD 的并集. 由于 AX 的垂直平分线不经过 A，上述两点说明：我们要找的就是满足 “存在 $P\in S$ 使 $AP=PX$” 的点 $X\neq A$. 称这样的点为可达点.

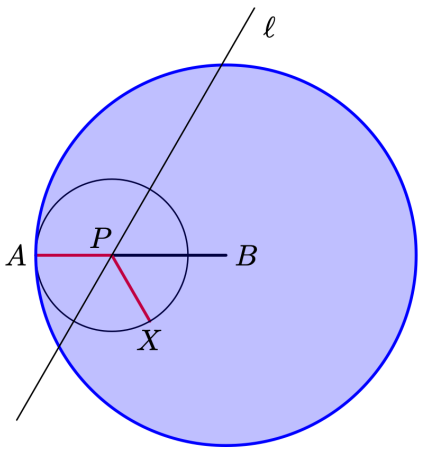
断言三. 可达点集合恰为以下三个开圆盘的并集：

- 以 B 为圆心、半径为 1 的圆盘 ω_B；
- 以 C 为圆心、半径为 $\sqrt{2}$ 的圆盘 ω_C；
- 以 D 为圆心、半径为 1 的圆盘 ω_D.

下图显示这个集合，其中红色线段表示 S.



先证明任何可达点都在这三个圆盘之一中. 若存在 $P \in AB$ 使 $AP = PX$, 则 X 位于以 P 为圆心、半径为 AP 的圆上. 这个小圆在 A 处与 ω_B 内切, 其余点均在 ω_B 内, 所以 $X \neq A$ 时在 ω_B 内. 当 $P \in AC$ 或 $P \in AD$ 时同理, 分别落在 ω_C 或 ω_D 内.



反过来, 任取 ω_B 内一点 X, 作一个经过 X、在 A 处与 ω_B 内切的圆, 并记圆心为 P. 则 P 在线段 AB 的内部, 且 $AP = PX$, 故 X 为可达点. 对另外两个圆盘同理, 断言三得证.

最后求三个圆盘并集的面积. 令 B', D' 分别为 A 关于 B, D 的对称点. 如图, 该并集除边界外可以分成三角形 $AB'D'$, 以及分别以 B, C, D 为圆心、半径为 $1, \sqrt{2}, 1$ 的三个外侧半圆, 且各部分内部互不重叠. 因此面积为

$$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 + \frac{\pi}{2} + \pi + \frac{\pi}{2} = 2 + 2\pi.$$

译注. 若折叠的是不含红点的那部分, 红点可留在 A, 因此完整可达集合还须包括点 A; 加入一个点不改变上述面积.

第 25 题 · GUTS（13 分）

设 $p(x)$ 是次数不超过 6 的多项式，且对于所有 $n \in \{2,3,4,5,6,7,8\}$，有 $p(n) = 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}$. 求 $p(0)$.

解析.

答案. $\dfrac{15}{56}$

定义多项式

$$q(x) = x\big(p(x) - p(x-1)\big) - 1.$$

注意以下三点：

1. q 以 $3,4,5,6,7,8$ 为根；
2. 因为 $p(x) - p(x-1)$ 的次数不超过 5，所以 q 的次数不超过 6；
3. $q(0) = -1$.

由前两点，$q(x) = c(x-3)(x-4)\cdots(x-8)$. 再由第三点，

$$q(x) = -\frac{(x-3)(x-4)\cdots(x-8)}{3\cdot 4\cdots 8} = -\frac{2!}{8!}(x-3)(x-4)\cdots(x-8).$$

分别代入 $x=2$ 与 $x=1$，得

$$2\big(p(2)-p(1)\big) = 1 - \frac{2!6!}{8!} = \frac{27}{28}, \qquad p(1)-p(0) = 1 - \frac{2!7!}{8!} = \frac{3}{4}.$$

所以

$$p(0) = p(2) - \frac{3}{4} - \frac{27}{56} = \left(1+\frac{1}{2}\right) - \frac{3}{4} - \frac{27}{56} = \frac{15}{56}.$$

第 26 题 · GUTS（13 分）

Sophia 从一个 5×5 的点阵中等概率地选出 10 个点. 已知每行、每列恰有 2 个点被选中，求所选点中有 4 个构成边与点阵行列平行的矩形的概率.

解析.

答案. $\dfrac{5}{17}$

将各列编号为 1 至 5. 构造顶点为 $1,2,3,4,5$ 的多重图 G：对每一行，在这一行两个被选中点所在列对应的顶点之间连一条边. 若若干行选中了相同的两列，就在对应顶点间连多条边. 由于每列恰有两个选中点，G 的每个顶点的度数都是 2. 下图给出了例子.

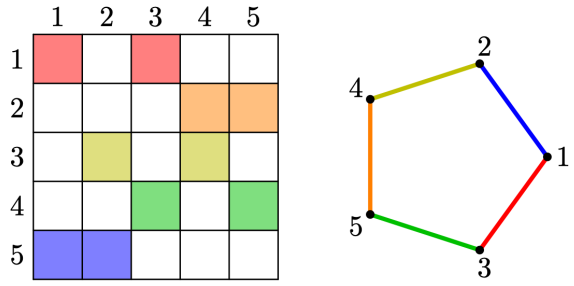
命题 1：G 的每个连通分支都是长度大于 1 的圈.

证明：图中没有孤立顶点，所以每个连通分支的顶点数都大于 1. 任取一个连通分支 C，按如下方法沿边行进：从某个顶点 v_1 出发，到达顶点 v_2；此后每到一个顶点，就沿不同于刚才所走边的另一条边继续；直到某个顶点重复出现. 由于 C 有限，重复必然发生.

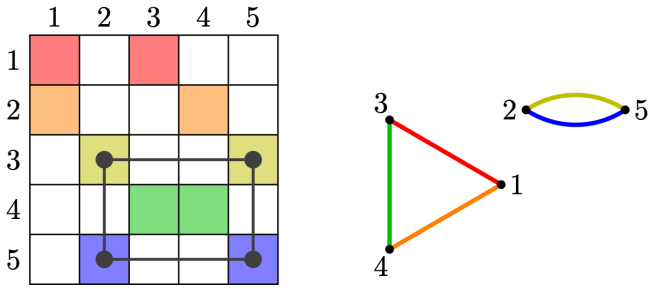
第一次重复出现的顶点一定是 v_1. 否则，该顶点被进入两次、离开一次，至少关联三条不同的边，与度数为 2 矛盾. 因此 C 包含一个圈. 圈上每个顶点的度数都是 2，它关联的边已全部用在圈上，故整个连通分支就是这个圈，命题得证.

因此，G 只能是一个长度为 5 的圈，或者由长度分别为 2、3 的两个圈组成. 四个选中点构成所求矩形，当且仅当存在一个长度为 2 的圈，即第二种情形.

第一种情形中，选择与顶点 1 相邻的两个顶点有 $\binom{4}{2}$ 种方法；选定后补成圈有 2 种方法，共有 12 个可能的图 G. 每条边连接的顶点对都不同，故把五条边分配给五行有 5! 种方法.



第二种情形中，将五个顶点分为大小分别为 2、3 的两组，有 $\binom{5}{2}=10$ 种方法；分组一旦确定，两个圈就确定了. 每个图中有两条边连接同一顶点对，所以分配给五行有 $\dfrac{5!}{2}$ 种不同方法.



所求概率为

$$\frac{10\cdot 5!/2}{10\cdot 5!/2+12\cdot 5!}=\frac{5}{5+12}=\frac{5}{17}.$$

第 27 题 · GUTS（13 分）

Crystal 在日记里写下两个五位正整数，十个数字 $0,1,\ldots,9$ 各使用一次，且不允许有前导零. 求这两个数之差的绝对值的各位数字之和的最大值.

解析.

答案. 40

设两个数为 $A>B$. 对正整数 N，用 $s(N)$ 表示其各位数字之和. 设从 A 中减去 B 的竖式计算中一共发生 R 次借位.

命题 1：$s(A-B)=s(A)-s(B)+9R$.

证明：考察从右向左逐位相减的通常算法. 在第 i 步，从 A 的该位数字 A_i 中减去 B 的该位数字 B_i，必要时借位. 若不借位，结果中写下 A_i-B_i，为数字和贡献 A_i-B_i. 若借位，写下 A_i-B_i+10，并从左边一位 A_{i+1} 中减去 1，所以总贡献相较于不借位时增加 9. 因此

$$s(A-B)=\sum_{i=1}^{5}(A_i-B_i)+9R=s(A)-s(B)+9R.$$

这里逐步算法中的数字需计入前一步造成的借位调整；等价地，每跨过一个相邻数位边界借位，数字和就增加 9.

分别对 $R\in\{0,1,2,3,4\}$ 优化. 原解的思路是在借位次数满足要求的前提下，尽量让 A 使用较大的数字. 十个数字总和不变，这同时使 $s(B)$ 尽量小，从而由命题 1 使 $s(A-B)$ 尽量大. 各情形给出的最优构造如下：

- $R=0$：$98765-43210=55555$，数字和为 25；
- $R=1$：$98764-32105=66659$，数字和为 32；
- $R=2$：$98753-21064=77689$，数字和为 37；
- $R=3$：$98642-10753=87889$，数字和为 40；
- $R=4$：$97530-18642=78888$，数字和为 39.

最后一种情形不能继续照搬前面的模式：$97531-08642=88889$ 虽有更大的数字和，但较小的数有前导零，不是五位数，因而不允许. 综合各情形，最大数字和为 40.

译注与核校：原文将 “从 A_i 中减去 B_i” 的主被减数口误写反，且把 $97531-08642$ 的结果误印为 8889，此处已改为 88889. 原解只简述上述各借位情形的最优性，没有展开上界证明；以上是忠实译解，不将构造本身冒充最优性证明. 独立穷举核校列于审计报告，以所有十个数字的排列、两数均五位且 $A>B$ 为条件，核验了五类最大值及最终答案.

第 28 题 · GUTS（15 分）

一百名玩家 $P_1, P_2, \ldots, P_{100}$ 玩一个游戏. 玩家 P_i 的硬币正面朝上的概率为 p_i. 第 n 轮由玩家 P_n 抛自己的硬币，其中下标按模 100 循环. 若正面朝上，游戏立刻结束，该玩家获胜；否则轮到下一名玩家. 已知每名玩家获胜的概率都是 $\dfrac{1}{100}$，且 $p_{100} = \dfrac{6}{7}$，求 p_1.

解析.

答案. $\dfrac{6}{601}$

设前 100 轮没有玩家获胜的概率为 r. 则 P_1 获胜的概率为

$$p_1 + rp_1 + r^2 p_1 + \cdots = \frac{p_1}{1-r} = \frac{1}{100}. \tag{2}$$

P_2 获胜的概率为

$$(1-p_1)p_2 + r(1-p_1)p_2 + \cdots = \frac{(1-p_1)p_2}{1-r} = \frac{1}{100}. \tag{3}$$

同理，$\dfrac{(1-p_1)(1-p_2)p_3}{1-r} = \dfrac{1}{100}$，$\dfrac{(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)p_4}{1-r} = \dfrac{1}{100}$，依此类推. 用式（2）除以式（3），得到 $\dfrac{p_1}{1-p_1} = p_2$；一般地，对 $1 \le i \le 99$，有 $\dfrac{p_i}{1-p_i} = p_{i+1}$. 令 $q_i = \dfrac{1}{p_i}$，则

$$q_{i+1} = \frac{1}{p_{i+1}} = \frac{1-p_i}{p_i} = \frac{1-1/q_i}{1/q_i} = q_i - 1.$$

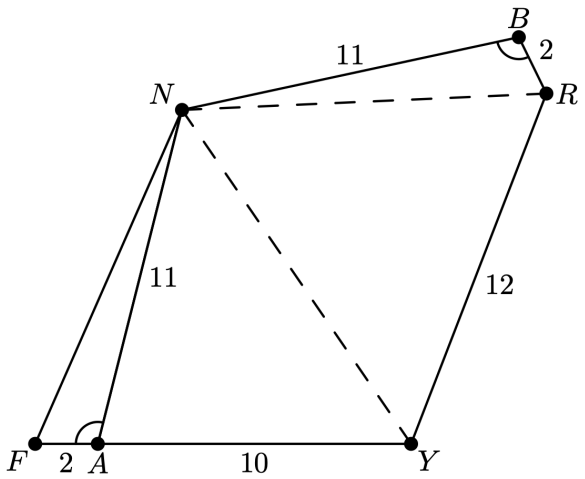
反复应用，得到 $q_1 = q_{100} + 99 = \dfrac{7}{6} + 99 = \dfrac{601}{6}$，所以 $p_1 = \dfrac{6}{601}$.

第 29 题 · GUTS（15 分）

凸五边形 $BRYAN$ 的面积为 128，且 $\angle A + \angle B = 180^\circ$，边长满足 $BR = 2$、$RY = 12$、$YA = 10$、$AN = 11$、$NB = 11$. 求 $\sin \angle A$.

解析.

答案. $\dfrac{32}{33}$



在射线 YA 上越过 A 取点 F, 使 $AF=2$. 由边角边, $\triangle BRN\cong\triangle AFN$; 再由边边边, $\triangle RYN\cong\triangle FYN$. 由于

$$[YFNR]=[YANR]+[AFN]=[YANR]+[BRN]=[BRYAN]=128,$$

可得 $[FNY]=\dfrac{[BRYAN]}{2}=64$. 又 $FY=12$, 所以 N 到直线 AY 的距离为 $\dfrac{32}{3}$. 因此

$$\sin\angle A=\frac{32/3}{11}=\frac{32}{33}.$$

第 30 题 · GUTS（15 分）

存在一个实系数二元多项式 $p(x,y)$, 其总次数不超过 4, 且 $p(m,n)$ 为下表第 m 行、第 n 列的数. 这里行从下往上编号, 列从左往右编号.

4	8	$*$	?
3	5	9	$*$
2	3	5	9
0	1	2	2

求 $p(4,4)$, 即表格右上角的数.

解析.

答案. 30

给定多项式 $f(x,y)$, 定义有限差分

$$\Delta_x f=f(x+1,y)-f(x,y),\qquad \Delta_y f=f(x,y+1)-f(x,y).$$

注意到

$$\Delta_x(x^ay^b)=(x+1)^ay^b-x^ay^b=(ax^{a-1}+\cdots)y^b.$$

除常数情形外, 次数至少下降 1; 当 $a=0$ 时, 此差分为零. Δ_y 同理. 所以, 除常数多项式外, 两个差分算子均使次数至少下降 1.

由于 p 的总次数不超过 4, $q=\Delta_x\Delta_x\Delta_y\Delta_y p$ 的次数至多为 0, 即为常数. 用已知数据计算 $q(1,1)$, 就确定了 q 的所有值; 随后可以反向恢复差分, 求出 $p(4,4)$. 以下各表均按题面相同方式解释, 星号表示尚未确定的数.

第一次沿列方向作差:

$$\begin{array}{cccc} 4 & 8 & * & ? \\ 3 & 5 & 9 & * \\ 2 & 3 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array} \xrightarrow{\Delta_y} \begin{array}{ccc} 4 & * & * \\ 2 & 4 & * \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}.$$

第二次沿列方向作差：

$$\begin{array}{ccc} 4 & * & * \\ 2 & 4 & * \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \xrightarrow{\Delta_y} \begin{array}{cc} * & * \\ 2 & * \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{array}.$$

接着沿行方向作差两次：

$$\begin{array}{cc} * & * \\ 2 & * \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{array} \xrightarrow{\Delta_x} \begin{array}{cc} * & * \\ 1 & * \\ 1 & 3 \end{array} \xrightarrow{\Delta_x} \begin{array}{cc} * & * \\ 0 & * \end{array}.$$

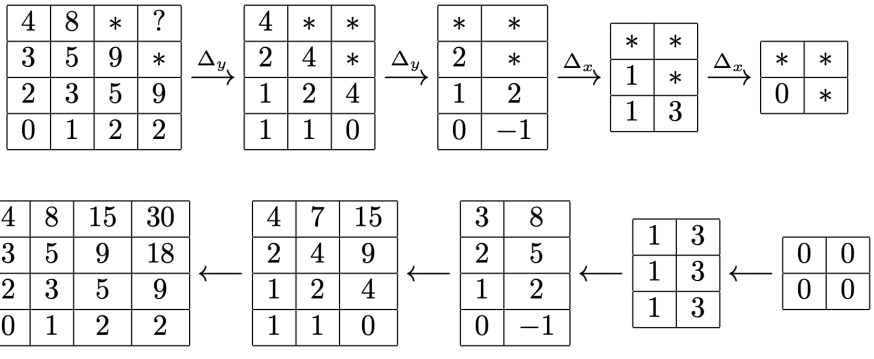
因此 q 处处为 0. 反向恢复得到：

$$\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{cc} 3 & 8 \\ 2 & 5 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{array}.$$

然后继续反向恢复：

$$\begin{array}{cc} 3 & 8 \\ 2 & 5 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc} 4 & 7 & 15 \\ 2 & 4 & 9 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{cccc} 4 & 8 & 15 & 30 \\ 3 & 5 & 9 & 18 \\ 2 & 3 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}.$$

故 $p(4,4) = 30$.



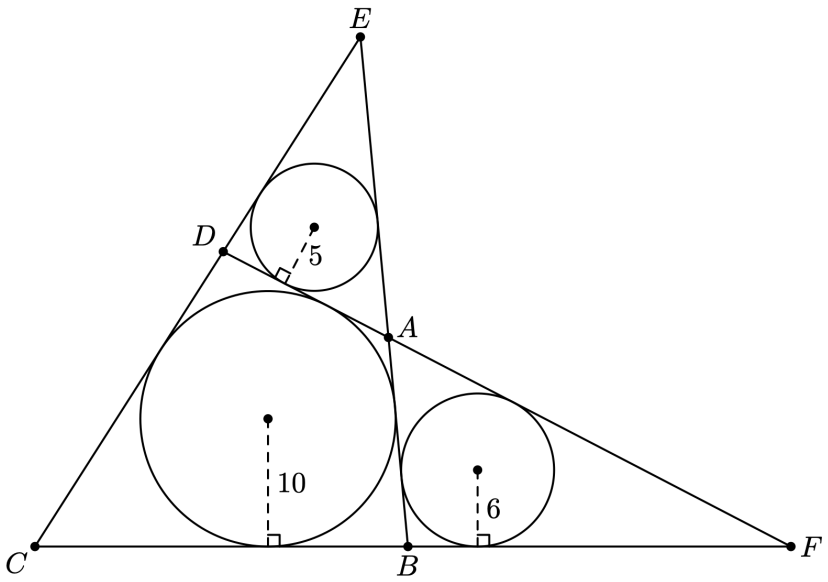
译注：原题直接以“右上角”为 $p(4,4)$，据此可知行号从下向上．此处明确写出，避免按通常从上向下编号误读．所有差分表均按原页逐格恢复，未省略星号表．

第 31 题 · GUTS（17 分）

设 $ABCD$ 为圆内接四边形，射线 BA、CD 相交于 E，射线 CB、DA 相交于 F．三角形 EDA、EBC、FAB、FCD 的内切圆半径依次为 $5, 10, 6, 10$．求四边形 $ABCD$ 的面积．

解析.

答案. $80\sqrt{30}$



因为 $ABCD$ 四点共圆，$\triangle EAD \sim \triangle ECB$，故 $\dfrac{DA}{BC} = \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2}$．类似地，$\triangle FAB \sim \triangle FCD$，所以 $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5}$.

在角 DCB 内，与射线 CD、CB 都相切且半径为 10 的圆唯一，所以 $\triangle EBC$ 与 $\triangle FCD$ 的内切圆重合．因此，四边形 $ABCD$ 也有内切圆．由外切四边形的对边和相等，

$$AD + BC = AB + CD.$$

代入上述比例，得 $\dfrac{3}{2}BC = AD + BC = AB + CD = \dfrac{8}{3}AB$．令 $x = \dfrac{AB}{9}$，则 AB, BC, CD, DA 依次为 $9x, 16x, 15x, 8x$.

下面用两种方法计算面积．首先，有内切圆的多边形面积等于内切圆半径乘以半周长，所以

$$[ABCD] = 10 \cdot 24x = 240x.$$

另一方面，由于四边形圆内接，可用婆罗摩笈多公式：

$$[ABCD] = \sqrt{(24x - 9x)(24x - 16x)(24x - 15x)(24x - 8x)} = 24x^2\sqrt{30}.$$

令两式相等，得到 $x=\dfrac{10}{\sqrt{30}}$，从而 $[ABCD]=80\sqrt{30}$.

第 32 题 · GUTS（17 分）

Mark 有一个质量为 1 克的放射性小球. 在第 n 分钟，每个放射性小球都有 $\dfrac{1}{2}$ 的概率分裂成两个放射性小球，每个新球的质量都是 2^{-n} 克，不论原球的质量以及原球何时产生. 求 7 分钟后所有小球总质量的期望，单位为克.

解析.

答案. $\dfrac{2123}{8192}$

解法一

先计算 n 分钟后各种质量的小球个数的期望，再利用期望的线性性计算总质量. 每个小球每分钟以 $\dfrac{1}{2}$ 的概率变成两个球，因此 n 分钟后的球数期望为 $\left(\dfrac{3}{2}\right)^n$.

先看恰好第 k 分钟结束时质量为 2^{-k} 的球数，其中 $k>0$. 第 $k-1$ 分钟后的每个球在第 k 分钟平均贡献一个质量为 2^{-k} 的新球，所以其个数期望为 $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{k-1}$. 当 $k=0$ 时例外，此时期望为 1.

在 $n\geq k$ 分钟后仍然质量为 2^{-k} 的球，只能是在第 k 分钟产生，此后 $n-k$ 分钟一直没有分裂. 每个这样的球不再分裂的概率是 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-k}$. 因此，$n$ 分钟后这一质量的球数期望是 $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{k-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-k}$.

当 $k=0$ 时仍需单独处理，其期望为 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$，即初始小球一直不分裂的概率.

于是总质量的期望为

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}2^{-k}&=\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(1+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}\right)\\&=\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(1+\frac{(3/2)^n-1}{(3/2)-1}\right)\\&=\frac{3^n-2^{n-1}}{2^{2n-1}}.\end{aligned}$$

取 $n=7$，得到 $\dfrac{2187-64}{8192}=\dfrac{2123}{8192}$.

解法二

用 T_n 表示 n 分钟后的总质量期望，按第一分钟的结果推导递推式.

若第一分钟分裂为两个质量为 $\dfrac{1}{2}$ 的球，就分别考虑它们. 将原题过程中的所有质量乘以 $\dfrac{1}{2}$，则经过第 $1,2,\ldots,n-1$ 分钟后的总质量期望为 $\dfrac{1}{2}T_{n-1}$. 这个缩放过程与一个质量为 $\dfrac{1}{2}$ 的球经历第 $2,3,\ldots,n$ 分钟完全对应. 所以第一分钟后的每个球最终贡献的期望为 $\dfrac{1}{2}T_{n-1}$，两个球合计为 T_{n-1}.

若第一分钟没有分裂，同样将所有质量减半并运行 $n-1$ 分钟的过程，与一个质量为 1 的球经历第 $2,3,\ldots,n$ 分钟所得结果相同，只有一种例外：初始球此后始终没有分裂. 这时缩放过程的结果是 $\dfrac{1}{2}$，实际结果是 1；此情形的概率为 $\dfrac{1}{2^{n-1}}$. 因此这一分支的总质量期望为

$$\frac{1}{2}T_{n-1}+\frac{1}{2^{n-1}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}T_{n-1}+\frac{1}{2^n}.$$

两种分支各以 $\frac{1}{2}$ 的概率发生，取平均得

$$T_n=\frac{3}{4}T_{n-1}+\frac{1}{2^{n+1}}.$$

这是非齐次线性递推. 按通常方法，写成 $T_n=T_n^{(h)}+T_n^{(p)}$，其中齐次部分满足 $T_n^{(h)}=\frac{3}{4}T_{n-1}^{(h)}$，特解满足 $T_n^{(p)}=\frac{3}{4}T_{n-1}^{(p)}+\frac{1}{2^{n+1}}$，但不必满足边界条件. 确实，任取这样的特解，令 $T_n^{(h)}=T_n-T_n^{(p)}$，便有

$$\begin{aligned}T_n^{(h)}-\frac{3}{4}T_{n-1}^{(h)}&=\left(T_n-\frac{3}{4}T_{n-1}\right)-\left(T_n^{(p)}-\frac{3}{4}T_{n-1}^{(p)}\right)\\&=\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{2^{n+1}}=0\,.\end{aligned}$$

这样就归结为已知如何求解的齐次递推.

寻找特解时，尝试 $T_n^{(p)}=\dfrac{B}{2^n}$，因为这样 $T_n^{(p)}-\frac{3}{4}T_{n-1}^{(p)}$ 与 $\frac{1}{2^n}$ 成比例，正是所需形式. 代入得

$$\frac{B}{2^n}=\frac{3}{4}\cdot\frac{B}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^{n+1}}\quad\Longrightarrow\quad B=-1.$$

故 $T_n^{(p)}=-\dfrac{1}{2^n}$. 齐次递推立即给出 $T_n^{(h)}=A\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$，其中 A 是常数. 于是

$$T_n=A\left(\frac{3}{4}\right)^n-\frac{1}{2^n}.$$

由 $T_1=1$，得 $1=\frac{3}{4}A-\frac{1}{2}$，即 $A=2$. 所以

$$T_7=2\left(\frac{3}{4}\right)^7-\frac{1}{2^7}=\frac{3^7-2^6}{2^{13}}=\frac{2123}{8192}.$$

第 33 题 · GUTS（17 分）

$\dfrac{1}{179}$ 的十进制展开的循环节长度为 178. 求这个循环节内各位数字的平方和.

解析.

答案. 5049

对实数 r 和正整数 n，记 $d_n(r)$ 为 r 的小数点后第 n 位数字. 要求的是 $\displaystyle\sum_{n=1}^{178}d_n\left(\frac{1}{179}\right)^2$.

对任意实数 r、正整数 n 和整数 m，有 $d_n(r)=d_1(10^{n-1}r)$，且 $d_n(r-m)=d_n(r)$. 所以

$$\sum_{n=1}^{178}d_n\left(\frac{1}{179}\right)^2=\sum_{n=1}^{178}d_1\left(\frac{10^{n-1}}{179}\right)^2.$$

因为 $\dfrac{1}{179}$ 每隔 n 位重复当且仅当 $179 \mid 10^n-1$，其循环节长度就是 10 模 179 的乘法阶．题目给出此阶为 178，因此 $1, 10, 10^2, \ldots, 10^{177}$ 恰好各遍历一次模 179 的全部非零剩余类．故

$$\sum_{n=1}^{178} d_1\left(\frac{10^{n-1}}{179}\right)^2 = \sum_{k=1}^{178} d_1\left(\frac{k}{179}\right)^2.$$

数字 $d_1\left(\dfrac{k}{179}\right)$ 是满足 $d \le \dfrac{10k}{179} < d+1$ 的唯一数字 d，即等于 d 当且仅当

$$k \in \left[\frac{179d}{10}, \frac{179(d+1)}{10}\right).$$

将该区间的右端点向右延长 $\dfrac{1}{10}$，所得半开区间长度恰为 18，所以含有恰好 18 个整数．原区间也含有 18 个整数，除非被删去的小区间

$$\left[\frac{179(d+1)}{10}, \frac{179(d+1)}{10} + \frac{1}{10}\right)$$

内含有一个整数，此时只有 17 个．这等价于 $\dfrac{179(d+1)}{10}$ 是整数，在 $0 \le d \le 9$ 中只有 $d=9$ 满足．

另外求和只取 $1 \le k \le 178$，还要排除属于 $d=0$ 对应区间的 $k=0$．故数字 0 和 9 各出现 17 次，其余数字各出现 18 次．答案为

$$18(1^2+\cdots+9^2) - 9^2 = 18 \cdot \frac{9 \cdot 10 \cdot 19}{6} - 9^2 = 9(570-9) = 5049.$$

第 34 题 · GUTS（20 分）

Krad 从数 1 开始．每一步，若当前数为 n，就从 $6n$ 的所有正因数中等概率选一个，替换当前数．设 2026 步后当前数为 48 的概率是 p，估计 $\dfrac{1}{p}$.

请提交一个实数 E．若正确答案为 A，得分为 $\left\lfloor 20.99e^{-0.02(E-A)^4} \right\rfloor$.

解析.

答案. $\dfrac{1}{p} \approx 24e^2 = 177.337346374\ldots$

记 $\nu_2(n)$ 为使 2^k 整除 n 的最大整数 k，类似定义 $\nu_3(n)$．两个指数的变化彼此独立，且分别遵循同一种随机过程：

- 从 0 开始；
- 每一步，若当前数为 m，就等概率地用 $0, 1, \ldots, m+1$ 中的一个整数替换它．

所以可分别估计 2026 步后 $\nu_2(n)=4$、$\nu_3(n)=1$ 的概率，再相乘．

记第 i 步后的数为 n_i，对非负整数 i, j，令 $p_{i,j}$ 表示 $\nu_2(n_i)=j$ 的概率，也就是 $\nu_3(n_i)=j$ 的概率．要在下一步得到 j，上一步的指数必须至少为 $j-1$；若上一步为 k，下一步从 0 至 $k+1$ 等概率选择，得到 j 的概率为 $\dfrac{1}{k+2}$．因此

$$p_{i,j}=\sum_{k=j-1}^{\infty}\frac{p_{i-1,k}}{k+2},$$

初始条件为 $p_{0,0}=1$，对 $j\neq 0$ 有 $p_{0,j}=0$. 约定 $p_{i,-1}=0$.

经过 2026 步后，我们预期各状态概率已经相当稳定，即 $p_{2026,j}\approx p_{2027,j}$；并预期 $p_{2026,1}$、$p_{2026,4}$ 远大于相邻两步的概率差，所以它们的倒数也相当稳定. 原解说明，这种收敛及差值衰减可用马尔可夫链基本定理作严格论证. 因此先计算长期平稳分布.

令平稳概率序列 $q_0,q_1,\dots$ 满足 $q_0+q_1+\cdots=1$，以及对所有 $j\geq 0$，

$$q_j=\sum_{k=j-1}^{\infty}\frac{q_k}{k+2}. \tag{4}$$

仍约定 $q_{-1}=0$. 下面证明这个序列唯一，并计算 $\dfrac{1}{q_1q_4}$. 将 $j+1$ 和 j 代入式（4）后相减，得

$$q_j-q_{j+1}=\frac{q_{j-1}}{j+1}. \tag{5}$$

命题 1：对所有 $m\geq 0$，$q_m=\dfrac{q_0}{m!}$.

证明：对 m 作强归纳. 当 $m=0$ 时显然；当 $m=1$ 时，在式 (5) 中取 $j=0$，得 $q_0-q_1=\dfrac{q_{-1}}{1}=0$，故 $q_1=q_0=\dfrac{q_0}{1!}$.

设 $m\geq 2$，且对所有 $k<m$ 都有 $q_k=\dfrac{q_0}{k!}$. 在式（5）中取 $j=m-1$，得 $q_{m-1}-q_m=\dfrac{q_{m-2}}{m}$. 利用归纳假设，

$$\begin{aligned}q_m&=q_{m-1}-\frac{q_{m-2}}{m}\\&=q_0\left(\frac{1}{(m-1)!}-\frac{1}{(m-2)!\,m}\right)\\&=\frac{q_0}{(m-2)!}\left(\frac{1}{m-1}-\frac{1}{m}\right)=\frac{q_0}{m!}.\end{aligned}$$

归纳完成.

再由归一化条件，$1=q_0\sum_{j=0}^{\infty}\dfrac{1}{j!}=q_0e$，得 $q_0=\dfrac{1}{e}$，所以 $q_j=\dfrac{1}{e\,j!}$. 特别地，这确定了唯一可能的平稳分布. 原解据此援引马尔可夫链基本定理. 最终估计为

$$\frac{1}{q_1q_4}=e(24e)=24e^2.$$

粗略取 $e^2\approx 2.72^2\approx 7.4$，得到 $24\cdot 7.4=177.6$，已足够取得全部 20 分.

原文附注与代码：原解附注称下列 Python 代码可计算答案，并称其与 $24e^2$ 的偏差仅来自浮点误差，而浮点误差远大于第 2026 步分布与平稳分布的差异. 原码逐字保留如下（缩进按原页恢复）：

```
probs = [1] + [0 for i in range(2026)]
for j in range(20):
    probs[2026] = probs[2025]/2027
    for k in range(2025, 0, -1):
        probs[k] = probs[k+1] + probs[k-1]/(k+1)
    probs[0] = probs[1]

print(1/(probs[4]*probs[1]))
```

译注与勘误：命题中的分母原印为 $j!$，应为 $m!$，已修正．原代码外层循环是 `range(20)`，实际仅迭代 20 步，不能称为完成 2026 步的计算，也不能据此认定残余差异只来自浮点误差．此外，对可数无限状态链，仅有平稳序列唯一还不能不加条件地推出收敛速率；原解没有给出第 2026 步误差的定量上界，所以本题结论保留为估算，不将稳态近似写成精确等式．

下面给出按原递推式真正进行 2026 步的修正版．每一步重新建立数组，并从高状态向低状态累加，避免原地更新带来的理解负担．第 i 步的最大指数为 i，所以这些数组保留了所有可达状态，没有额外截断．

```
probs = [1.0]
for step in range(2026):
    nxt = [0.0] * (len(probs) + 1)
    tail = 0.0
    for k in range(len(probs) - 1, -1, -1):
        tail += probs[k] / (k + 2)
        nxt[k + 1] = tail
    nxt[0] = tail
    probs = nxt
print(1 / (probs[4] * probs[1]))
```

独立运行结果和浮点精度限制见审计报告；数值计算的吻合不等于严格误差证明．**数值核验**：原码的 20 步结果约为 177.338279896714，修正版 2026 步结果约为 177.337346374336，而 $24e^2 \approx 177.337346374336$．原码的残余误差约为 0.0009335，确实不是通常双精度浮点舍入误差的量级．

第 35 题 · GUTS（20 分）

Sam 有一块标准的 6×6 黑白相间棋盘．随后，他以 $\dfrac{1}{2}$ 的概率将每个白格涂黑，各白格是否涂黑相互独立．估计此时棋盘上黑色连通区域个数的期望．

请提交一个实数 E．若正确答案为 A，得分为 $\left\lfloor 20.99e^{-12(E-A)^2} \right\rfloor$．

一个黑色连通区域是满足下述性质的极大黑格集合：集合中任意两个黑格之间，都有一条只经过该集合内黑格的路径，且路径上相邻两格共享一条边．

解析.

答案. $\dfrac{932081}{262144} = 3.555606842041015625$；官方估算解得到 3.53125，足够满分．

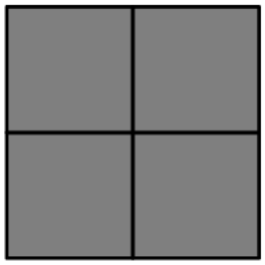
涂色完成后，在每个黑格的中心放置一个顶点，并在共享边的黑格中心之间连边，得到平面图．欧拉公式给出

$$C = V - E + F,$$

其中 C 是连通分支数，即黑色连通区域数，V 是顶点数，E 是边数，F 是被边围住的面数（不计无界的外部面）. 分别考察各格及各对相邻格，利用期望的线性性：

$$\mathbb{E}[V] = 18 + \frac{1}{2}\cdot 18 = 27, \qquad \mathbb{E}[E] = \frac{1}{2}(30+30) = 30.$$

顶点较多的面出现的概率随面大小增加而指数下降. 因此，可先用最小的面，即四个黑格组成的 2×2 方块所形成的四边形面的期望个数，作为 $\mathbb{E}[F]$ 的一个较好下界.



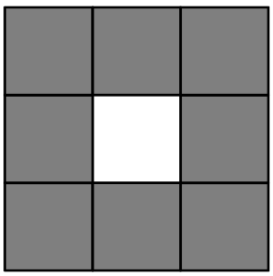
这种形状共有 25 个可能位置，每处都需要两个原白格被涂黑，所以

$$\mathbb{E}[F] \geq \frac{1}{2^2}\cdot 25 = \frac{25}{4}.$$

于是

$$\mathbb{E}[C] = \mathbb{E}[V] - \mathbb{E}[E] + \mathbb{E}[F] \geq 27 - 30 + \frac{25}{4} = 3.25.$$

以此估计可得 6 分. 为了更准确估计 F，再加上下图这种形状出现次数的期望.



原解称这种形状有 9 个可能位置（此位置数有误，见下方核校），需要四个白格被涂黑、另一个白格保持不变，因此出现次数的期望为 $\frac{9}{2^5}$. 故

$$\mathbb{E}[F] \geq \frac{25}{4} + \frac{9}{32} = 6.53125, \qquad \mathbb{E}[C] \geq 3.53125.$$

这一估计可以得到全部 20 分.

译注：答案栏列出精确期望，但上述官方解法实际给出的是可得满分的下界估算，没有推导精确分数. 不可将 3.53125 写成精确期望. 审计报告另列对全部 2^{18} 种涂色的独立枚举核验. **位置计数勘误**：上面的 9 是原文数据，实际应为 8. 一个 3×3 黑环的中心必须是未涂黑的原白格，且

不能位于边界．6×6 棋盘的内部是 4×4 方阵，其中恰有 8 个白格，所以这种有界面只有 8 个可能位置．按原解方法修正后应为

$$\mathbb{E}[F]\ge \frac{25}{4}+\frac{8}{32}=6.5,\qquad \mathbb{E}[C]\ge 3.5.$$

估计值 3.5 仍可取得 20 分．独立枚举所有 262144 种等概率涂色，连通分支个数总和为 932081，因此核得精确期望 $\dfrac{932081}{262144}$；这项枚举是补充核验，不是官方原解的步骤．

第 36 题 · GUTS（20 分）

求满足以下两个条件的正整数 $N<10^9$ 的个数：

- N 不是 2 或 5 的倍数；
- 不存在与 N 位数相同、且至多在一个十进制数位上与 N 不同的素数 M．

请提交一个正整数 E．若正确答案为 A，得分为 $\operatorname{round}\left(20\min\left(\dfrac{A}{E},\dfrac{E}{A}\right)^2\right)$．

解析．

答案．官方答案为 11155；官方估算过程得到约 11111，足够满分．

设 N 有 k 位．一方面，通过改动一个数位可以得到大约 $9k$ 个数；另一方面，一个数为素数的概率大致按 $\dfrac{1}{\log N}\sim\dfrac{1}{k}$ 的量级变化．因此，九位数满足第二个条件的概率与位数较少的数大致相近．我们先估计满足第一个条件的九位数也满足第二个条件的概率，再乘以 $4\cdot 10^8$，即小于 10^9 且满足第一个条件的正整数个数．

先假设 $k=9$．计算至多改动 N 的一个数位后，仍不是 2 或 5 的倍数的候选数个数．按被改动的位置分类：

- 不改任何数位，有 1 种，即 N 本身；
- 改末位，有 3 种，因为末位只能取 $1,3,7,9$ 中不同于原末位的数字；
- 改首位，有 8 种，因为不能取 0，也不能取原来的首位；
- 改其余任意一位，各有 9 种，因为可以取除原数字以外的任意数字．

共得 $3+8+9\cdot 7+1=75$ 个候选数．

大小约为 N 的数是素数的概率约为 $\dfrac{1}{\ln N}$．预先知道它不是 2 或 5 的倍数时，将此估计乘以 $\dfrac{2}{1}\cdot\dfrac{5}{4}$．若假设这 75 个候选数成为素数的事件相互独立，就得到 N 满足第二个条件的概率估计

$$\left(1-\frac{5}{2\ln N}\right)^{75}.$$

在所考虑的区间内，这个函数递增且向下凹，因此用 $N=5\cdot 10^8$ 处的值估计区间 $[10^8,10^9]$ 上的平均值．此时

$$\ln N=9\ln 10-\ln 2\approx 9(2.3)-0.7=20.$$

于是概率估计为

$$\left(1-\frac{5}{40}\right)^{75}=\left(\frac{7}{8}\right)^{75}\approx e^{-75/7.5}=e^{-10}.$$

又

$$\log_{10}(e^{10})=\frac{10}{\ln 10}\approx\frac{10}{2.3}\approx 4.35\approx 4+\log_{10}(2.5),$$

所以初步估计为

$$e^{-10}(4\cdot 10^8)\approx\frac{1}{2.5\cdot 10^4}(4\cdot 10^8)=16000,$$

可以得到 10 分.

为了改进，注意固定其余数位、只改变某位数字 d 时，模 3 的一个剩余类会出现四次（来自 $d=0,3,6,9$），另外两个剩余类各出现三次. 因此，这 75 个候选数中，几乎恰有三分之一能被 3 整除. 下面就按恰好三分之一处理. 此前的估计相当于把这 75 个候选数是否被 3 整除看作独立事件，这会显著影响结果.

于是，假设只有 50 个候选数不能被 3 整除，每个为素数的条件概率估计为

$$\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{\ln N}=\frac{15}{4\ln N}.$$

得到新的概率估计

$$\left(1-\frac{15}{4\cdot 20}\right)^{50}=\left(\frac{13}{16}\right)^{50}.$$

同时改进数值近似. 用泰勒展开

$$\ln(1-x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\cdots\right),$$

可得

$$\begin{aligned}\ln\frac{13}{16}&=-\left(\frac{3}{16}+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{16}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{3}{16}\right)^3+\cdots\right)\\&\approx-\left(0.1875+\frac{1}{2}(0.036)+\frac{1}{3}(0.007)\right)\\&\approx-0.208\,.\end{aligned}$$

首个略去项约为 $\frac{1}{4}\left(\frac{3}{16}\right)^4\approx 0.0003$，原解据此估计误差的量级. 于是

$$\ln\left(\left(\frac{13}{16}\right)^{50}\right) \approx 50(-0.208) = -10.4.$$

由于 $e^{-11.5} = (e^{2.3})^{-5} \approx 10^{-5}$，且 $e^{1.1} \approx 3$，故 $e^{-10.4} = e^{1.1-11.5} \approx 3 \cdot 10^{-5}$．得到

$$(3 \cdot 10^{-5})(4 \cdot 10^{8}) = 12000,$$

足够取得 17 分.

素数 3 之所以便于修正，是因为十个数字模它的剩余类分布近似均匀，所以这 75 个数的剩余类也近似均匀分布，而不是完全独立．原解认为另一个适于作这种修正的素数是 11：十个数字恰好各命中十一个剩余类中的一个，且互不重复．相比之下，模 7 时，一部分剩余类出现一次，其余出现两次，分布较不均匀．于是再像处理 3 那样，加入对 11 的修正.

估计不被 3 或 11 整除的候选数为 $50 \cdot \dfrac{10}{11} = \dfrac{500}{11}$ 个，每个为素数的概率约为

$$\frac{15}{4\ln N} \cdot \frac{11}{10} = \frac{33}{8\ln N}.$$

因此，所求概率的新估计为

$$\left(1 - \frac{33}{8 \cdot 20}\right)^{500/11} = \left(1 - \frac{33}{160}\right)^{500/11}.$$

估计其自然对数：

$$\begin{aligned}\frac{500}{11}\ln\left(1 - \frac{33}{160}\right) &\approx -\frac{500}{11}\left(\frac{33}{160} + \frac{1}{2}\left(\frac{33}{160}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{33}{160}\right)^3 + \frac{1}{4}\left(\frac{33}{160}\right)^4\right) \\ &\approx -\left(\frac{75}{8} + \frac{2475}{2560} + \frac{75}{8} \cdot \frac{27225}{204800} + 45 \cdot \frac{1}{4}(0.2)^4\right).\end{aligned}$$

译注：上一行完整保留原文中间算式，第三项的分数本身另有笔误：三次项应为 $\dfrac{500}{11} \cdot \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{33}{160}\right)^3 = \dfrac{27225}{204800} \approx 0.133$，前面不应再乘 $\dfrac{75}{8}$．按原文下一行的近似意图恢复后，应继续为

$$-\left(9.375 + \left(1 - \frac{1}{30}\right) + \frac{4}{30} + 0.018\right) \approx -10.49.$$

具体的手算近似方法并不重要：对负对数取 10.48 或 10.49 都足够.

再注意

$$\ln\frac{100}{36} \approx 2(2.3 - 0.693 - 1.1) \approx 1.01 = 5(2.3) - 10.49,$$

所以

$$e^{-10.49} \approx \frac{100}{36} \cdot 10^{-5} = \frac{25}{9} \cdot 10^{-5}.$$

最后得到

$$\left(\frac{25}{9} \cdot 10^{-5}\right)(4 \cdot 10^{8}) = \frac{10}{9} \cdot 10^{4} \approx 11111,$$

已足够获得全部 20 分.

译注与核校边界：最后一页原文还把负对数误写成 $+10.49$，把 1.01 误接到 $10.49 - 5(2.3)$，并把 $e^{-10.49}$ 误印为 $e^{10.49}$；上文均已按计算意图修正，原文层保留原印. “只有另一个素数 11” 是原解估算启发，并非关于任意素数的严格唯一性定理. 整个过程使用素数密度、近似独立性和同余修正，只是估算，不能证明精确计数 11155；本译解没有声称已对十亿以下整数完成独立精确筛查.