2026 年第 40 届韩国数学奥林匹克第二轮

2026-11-22　原文链接

2026 年 11 月 14 日（韩国当地时间）

第一场（09:30–12:30）

第 1 题

设 T 为满足 $1 \le x < y < z \le 12$ 且 $3 \mid x+y+z$ 的整数三元组 (x,y,z) 的集合. 设 $x_1, x_2, \ldots, x_{12}$ 为非负实数，且 $x_1 + x_2 + \cdots + x_{12} = 1$. 求

$$\sum_{(i,j,k)\in T} x_i x_j x_k$$

的最大值.

第 2 题

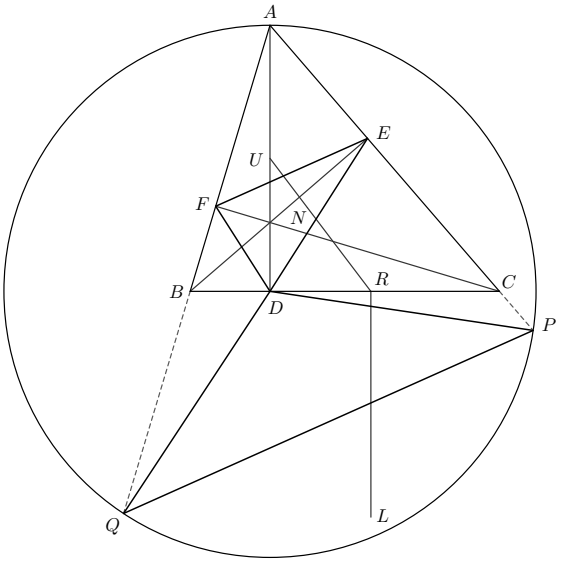
给定正整数 n. 设平面上的点集

$$S = \{(x,y) \mid x,y \in \{1,2,\ldots,3n\}\}.$$

将 S 中的点染成黑色或白色，使得每一行、每一列均恰有 $2n$ 个黑点和 n 个白点. 证明：四个顶点均在 S 中、各边均平行于坐标轴，且一条对角线的两端都是白点、另一条对角线的两端都是黑点的矩形，多于 $2n^4$ 个.

第 3 题

在锐角三角形 ABC 中，AD、BE、CF 为三条高．设 U 为 AD 的中点，N 为三角形 DEF 的外心，直线 UN 与 BC 交于点 R．以 D 为圆心、DA 为半径的圆与直线 AC、AB 分别再交于点 P、Q．设 L 为三角形 DPQ 的外心．证明：$RL \perp BC$．



第 4 题

设 x_1, x_2, x_3 为正整数，且 $\gcd(x_1, x_2, x_3) = 1$．整数 $y_1, y_2, y_3, z_1, z_2, z_3$ 满足：$\sum_{i=1}^{3} x_i y_i$ 和 $\sum_{i=1}^{3} x_i z_i$ 均为 $\sum_{i=1}^{3} x_i^2$ 的倍数．用 x_1, x_2, x_3 表示

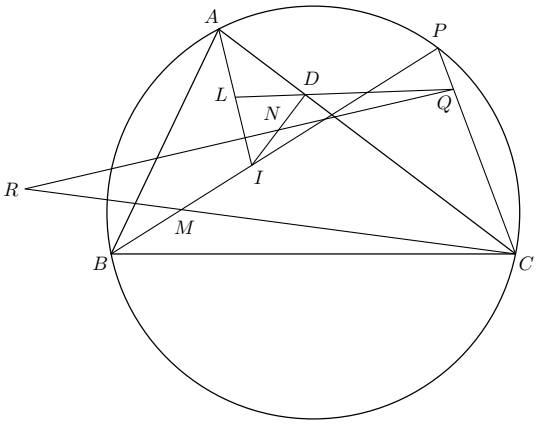
$$\left(\sum_{i=1}^{3} y_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{3} z_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{3} y_i z_i\right)^2$$

的最小正值．

第二场（14:20–17:20）

第 5 题

设 ABC 为三边互不相等的锐角三角形，I 为其内心，D 为点 I 到直线 AC 的垂足. 设 L, M, N 分别为 AI, BI, DI 的中点. 直线 BI 与三角形 ABC 的外接圆再交于点 P；直线 CP 与 LD 交于点 Q，直线 QN 与 CM 交于点 R. 证明：I, N, R, M 四点共圆.



第 6 题

设 p 为奇素数. 在 $1, 2, \ldots, p-1$ 中，把存在正整数 $m \le \dfrac{p-1}{2}$ 使得 $nm \equiv 1 \pmod{p}$ 的整数 n 收入集合 A_p. 求所有使 A_p 中各元素之和为偶数的奇素数 p.

第 7 题

给定整数 $n \ge 2$. 设 $a_1, a_2, \ldots, a_{4n}$ 均为 1 或 -1，下标按周期 $4n$ 延拓，且

$$\sum_{i=1}^{4n} a_i = \sum_{i=1}^{4n} a_i a_{i+2} = 0.$$

用 n 表示

$$\sum_{i=1}^{4n} a_i a_{i+1}$$

的最小值.

第 8 题

设 $A_1, A_2, \ldots, A_N$ 是 $\{1, 2, \ldots, 2026\}$ 的两两不同的子集，满足下列条件：

1. 对每个整数 $j \in \{1, 2, \ldots, 2026\}$，至多有一个 $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$ 使得 $|A_i| = j$.
2. 对任意 $1 \le i < j \le N$，$|A_i \cap A_j|$ 为奇数.

求 N 的最大值.