第 78 届波兰数学奥林匹克第一阶段测试题及解析

2026-11-10　原文链接

第 78 届波兰数学奥林匹克（2026/2027 学年）的第一阶段采用了新赛制. 此前的第一阶段是持续约三个月的通讯赛，共三组、每组四题；本届改为两次现场考试：10 月 15 日在各校进行 75 分钟的测试，共 12 题，每题含三个独立的真假判断；11 月 6 日在指定考点进行 240 分钟的开放题考试，共 5 题，要求写出完整论证. 测试用于选拔进入开放题部分的选手，晋级第二阶段则只依据开放题成绩.

本文为 2026 年 10 月 15 日测试部分全部试题及官方解答的中文翻译. 每题的三个判断全对得 2 分，答对两个得 1 分，其余得 0 分，满分 24 分. 请分别判断每题的 a、b、c 三个命题是否正确.

第 1 题

数 $(\sqrt{6}+\sqrt{7})^{2026}+(\sqrt{6}-\sqrt{7})^{2026}$：

a）是无理数；

b）能被 2 整除；

c）能被 3 整除.

解析.

答案：a）假；b）真；c）假.

由二项式定理，

$$(\sqrt{6}+\sqrt{7})^{2026}=\sum_{k=0}^{2026}\binom{2026}{k}(\sqrt{6})^{k}(\sqrt{7})^{2026-k},$$

类似地，

$$(\sqrt{6}-\sqrt{7})^{2026}=\sum_{k=0}^{2026}\binom{2026}{k}(\sqrt{6})^{k}(-\sqrt{7})^{2026-k}.$$

两个和式中，偶数下标 k 对应的项相同，奇数下标 k 对应的项互为相反数. 因此

$$(\sqrt{6}+\sqrt{7})^{2026}+(\sqrt{6}-\sqrt{7})^{2026}=2\sum_{k=0}^{1013}\binom{2026}{2k}6^{k}7^{1013-k}.$$

所以这是一个能被 2 整除的整数. 和式中除首项外的每一项都能被 3 整除，而首项 7^{1013} 模 3 余 1，故所求数不能被 3 整除.

第 2 题

数 $1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+2025\cdot 2026+2026\cdot 1$：

a）大于 $1^2+2^2+\cdots+2026^2$；

b）大于 $1\cdot 2026+2\cdot 2025+\cdots+2025\cdot 2+2026\cdot 1$；

c）小于 $1\cdot 3+2\cdot 4+\cdots+2024\cdot 2026+2025\cdot 1+2026\cdot 2$.

解析.

答案：a）假；b）真；c）假.

记

$$\begin{aligned}A&=1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+2025\cdot 2026+2026\cdot 1,\\ B&=1^2+2^2+\cdots+2026^2,\\ C&=1\cdot 2026+2\cdot 2025+\cdots+2025\cdot 2+2026\cdot 1,\\ D&=1\cdot 3+2\cdot 4+\cdots+2024\cdot 2026+2025\cdot 1+2026\cdot 2.\end{aligned}$$

a）对于不相等的正数 a,b，有 $ab<\dfrac{a^2+b^2}{2}$. 于是

$$A<\frac{1^2+2^2}{2}+\frac{2^2+3^2}{2}+\cdots+\frac{2025^2+2026^2}{2}+\frac{2026^2+1^2}{2}=B.$$

b）计算差 $A-C$，得

$$\begin{aligned}A-C&=1\cdot(2-2026)+2\cdot(3-2025)+3\cdot(4-2024)+\cdots\\ &\quad+2025\cdot(2026-2)+2026\cdot(1-1)\\ &=1\cdot(-2024)+2\cdot(-2022)+3\cdot(-2020)+\cdots\\ &\quad+2024\cdot 2022+2025\cdot 2024.\end{aligned}$$

将首项与末项配对，第二项与倒数第二项配对，依此类推，得到

$$A-C=2024^2+2022^2+\cdots+2^2>0.$$

故 $A>C$.

c）有

$$\begin{aligned}A&=(1\cdot 2+2\cdot 3)+(3\cdot 4+4\cdot 5)+\cdots\\ &\quad+(2023\cdot 2024+2024\cdot 2025)+(2025\cdot 2026+2026\cdot 1)\\ &=2\cdot 2^2+2\cdot 4^2+2\cdot 6^2+\cdots+2\cdot 2024^2+2026^2,\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned} D &= (2^2-1)+(3^2-1)+\cdots+(2025^2-1)+2025+2\cdot 2026 \\ &= 2^2+3^2+\cdots+2025^2+4053. \end{aligned}$$

因此

$$A-D = 2^2-3^2+4^2-5^2+\cdots+2024^2-2025^2+2026^2-4053.$$

由于 $3^2<4^2$，$5^2<6^2$，$\ldots$，$2023^2<2024^2$，且

$$2^2+2026^2 = 4+2025^2+2\cdot 2025+1 = 2025^2+4055,$$

上述差为正，故 $A>D$.

注. a、b 两问也可直接由重排不等式得出：若 $x_1\le x_2\le\cdots\le x_n$ 且 $y_1\le y_2\le\cdots\le y_n$，则对任意排列 $\sigma:\{1,2,\ldots,n\}\to\{1,2,\ldots,n\}$，都有

$$\begin{aligned} x_1y_n+x_2y_{n-1}+\cdots+x_ny_1 &\le x_1y_{\sigma(1)}+x_2y_{\sigma(2)}+\cdots+x_ny_{\sigma(n)} \\ &\le x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n. \end{aligned}$$

第 3 题

在三角形 ABC 中，$AB=6$，$AC=10$. 在线段 AC 上取点 D，使 $AD=6$；在射线 AB 上取点 E，使 $AE=10$. 线段 BC 与 DE 相交于点 P. 则：

a）射线 AP 平分 $\angle BAC$；

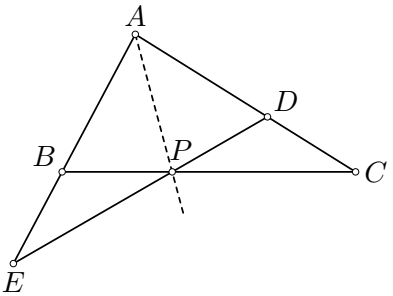
b）三角形 APB 与三角形 APC 的面积之比为 $\dfrac{9}{25}$；

c）B,D,C,E 四点共圆.

解析.

答案：a）真；b）假；c）真.

a）设 ℓ 为 $\angle BAC$ 的角平分线. 点 B,D 关于 ℓ 对称，点 C,E 也关于 ℓ 对称. 因此，线段 BC 和 DE 与直线 ℓ 交于同一点，即 P 在 ℓ 上.



b）三角形 APB 的面积为 $\dfrac{1}{2}AB\cdot AP\cdot\sin\dfrac{1}{2}\angle BAC$，三角形 APC 的面积为 $\dfrac{1}{2}AC\cdot AP\cdot\sin\dfrac{1}{2}\angle BAC$. 两者之比为 $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{5}$.

c）四边形 $BDCE$ 为等腰梯形，故其四个顶点共圆.

第 4 题

有 101 人参加一个聚会，其中有些人互相认识. 约定：若 A 认识 B，则 B 也认识 A. 则：

a）可能每个人都恰好认识 13 人；

b）一定有两个人认识的人数相同；

c）如果每个人都恰好认识 4 人，那么一定有三个人两两认识.

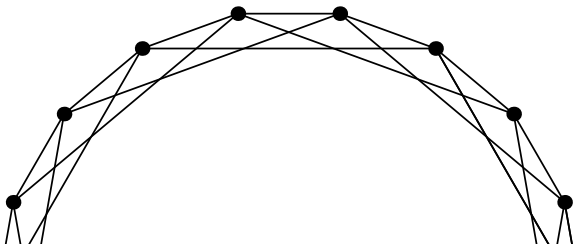
解析.

答案：a）假；b）真；c）假.

a）假设存在这样的情形，记相互认识的无序人对数为 k. 由于每个人都恰好认识 13 人，将每个人的熟人数相加，每一对都被计算了两次，故 $2k = 101 \cdot 13$. 但左边是偶数，右边是奇数，矛盾.

b）每个人认识的人数都是 0 至 100 之间的整数. 如果 101 人认识的人数互不相同，那么 0 至 100 的每一个整数都必须出现. 这就意味着既有一个人认识其他所有人，又有一个人谁也不认识，矛盾.

c）将所有人等间隔地排在一个圆周上，规定每个人只认识其左边第 1、第 3 个人，以及右边第 1、第 3 个人. 这样每个人恰好认识 4 人，却没有三个人两两认识.



第 5 题

对每个实数 c，考虑关于实数 x, y 的方程组

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ c(x + y) = 1. \end{cases}$$

则：

a）存在无穷多个实数 c，使该方程组无解；

b）存在实数 c，使该方程组恰有一组解；

c）存在实数 c，使该方程组恰有三组解.

解析.

答案：a）真；b）真；c）假.

当 $c = 0$ 时，第二个方程不可能成立，故方程组无解. 当 $c \neq 0$ 时，第二个方程表示直线 $y = -x + \dfrac{1}{c}$，

第一个方程表示单位圆. 若 $\left|\frac{1}{c}\right| > \sqrt{2}$，这条直线与单位圆没有公共点；若 $\left|\frac{1}{c}\right| = \sqrt{2}$，则直线与单位圆相切. 直线不可能与圆恰有三个公共点.

第 6 题

设 $N = 3^{12} + 3^9 \cdot 7^2 + 3^5 \cdot 7^4 + 7^6$. 则：

a）N 是一个整数的平方；

b）N 恰有 64 个正因数；

c）使 kN 为整数平方的最小正整数 k 等于 130.

解析.

答案：a）假；b）真；c）真.

注意到

$$\begin{aligned} N &= (3^4)^3 + 3 \cdot (3^4)^2 \cdot 7^2 + 3 \cdot 3^4 \cdot (7^2)^2 + (7^2)^3 \\ &= (3^4 + 7^2)^3 = 130^3 = 2^3 \cdot 5^3 \cdot 13^3. \end{aligned}$$

因此 N 不是完全平方数. 它的正因数均可写成 $2^a 5^b 13^c$，其中 $a, b, c \in \{0, 1, 2, 3\}$，故正因数的个数为 $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$.

数 kN 是完全平方数，当且仅当 $k = 130\ell^2$，其中 ℓ 为正整数. 最小的这样的 k 是 130.

第 7 题

给定乘积为 1 的正实数 $x_1, x_2, \ldots, x_{12}$. 则：

a）其中至少有六个数不小于 1；

b）可以将这些数分成分别含五个数和七个数的两组，使第一组五个数的乘积不大于第二组七个数的乘积；

c）如果任意三个数的乘积都不小于 1，那么这十二个数都等于 1.

解析.

答案：a）假；b）真；c）真.

a）取 $x_1 = x_2 = \cdots = x_{11} = \frac{1}{2}$，$x_{12} = 2^{11}$，即得反例.

b）不妨设 $x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_{12}$. 若 $x_5 \le 1$，则 $x_1x_2x_3x_4x_5 \le 1$，从而

$$\begin{aligned} x_1x_2x_3x_4x_5 \le 1 &= x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7x_8x_9x_{10}x_{11}x_{12} \\ &\le x_6x_7x_8x_9x_{10}x_{11}x_{12}. \end{aligned}$$

若 $x_5 > 1$，则特别有 $x_{11} > 1$，$x_{12} > 1$，于是

$$x_1x_2x_3x_4x_5 \le x_6x_7x_8x_9x_{10} < x_6x_7x_8x_9x_{10}x_{11}x_{12}.$$

因此，将最小的五个数放在第一组，其余七个数放在第二组即可.

c）由条件有 $x_1x_2x_3 \geq 1$，$x_4x_5x_6 \geq 1$，$x_7x_8x_9 \geq 1$，$x_{10}x_{11}x_{12} \geq 1$. 四式相乘得到 $1 \geq 1$，故上述四个不等式都只能取等号. 同理可证，十二个数中任意三个数的乘积都等于 1.

特别地，对任意两两不同的下标 i,j,k,ℓ，都有 $x_ix_jx_k = x_ix_jx_\ell$，故 $x_k = x_\ell$. 因此所有数相等，又因其乘积为 1 且均为正数，所以它们都等于 1.

第 8 题

多项式 $P(x) = x^{2026} + x^{2025} + \cdots + x^2 + x + 1$：

a）没有实数零点；

b）满足 $P(2) > 2^{2027}$；

c）在区间 $[-1,1]$ 上为增函数.

解析.

答案：a）真；b）假；c）假.

a）当 $x \neq 1$ 时，$P(x) = \dfrac{x^{2027}-1}{x-1} \neq 0$；此外，$P(1) = 2027$. 所以 P 没有实数零点.

b）有 $P(2) = \dfrac{2^{2027}-1}{2-1} = 2^{2027} - 1 < 2^{2027}$.

c）有 $P(-1) = 1$，而

$$P\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{2027} - 1}{-\frac{1}{2} - 1} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2^{2027}} + 1\right) < 1.$$

故 P 在区间 $[-1,1]$ 上不是增函数.

第 9 题

给定正四面体 $ABCS$. 点 X,Y 分别在棱 AB,AS 上，且 $AX:XB = 1:2$，$AY:YS = 3:1$. 则：

a）平面 CXY 垂直于平面 ABC；

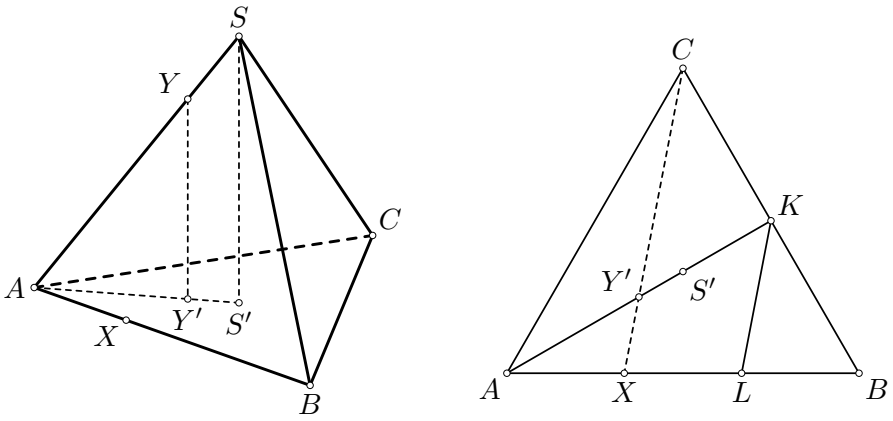
b）四面体 $AXCY$ 的体积是四面体 $ABCS$ 体积的 $\dfrac{1}{4}$；

c）三角形 CXY 的最长边是 CX.

解析.

答案：a）真；b）真；c）假.

a）设 S',Y' 分别为 S,Y 在平面 ABC 上的正投影. 只需证明 Y' 在直线 CX 上.



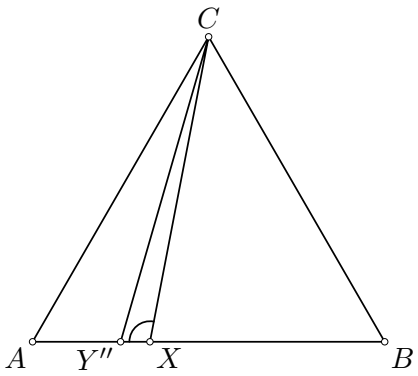
注意到 S' 为三角形 ABC 的重心，且 Y' 在线段 AS' 上，满足 $AY' : Y'S' = AY : YS = 3 : 1$. 设 K 为线段 BC 的中点，L 为线段 BX 的中点. 则

$$\frac{AY'}{AK} = \frac{AY'}{AS'} \cdot \frac{AS'}{AK} = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2},$$

故 Y' 为线段 AK 的中点. 又由 $AX : XB = 1 : 2$ 及 L 为 BX 的中点可知，X 为 AL 的中点. 因此，XY' 为三角形 AKL 的中位线，故 $XY' \parallel KL$；而 KL 为三角形 BCX 的中位线，故 $CX \parallel KL$. 所以 Y' 与 C 均在过 X 且平行于 KL 的直线上，即 C, X, Y' 共线.

b）三角形 ACX 的面积是三角形 ABC 面积的 $\dfrac{1}{3}$，点 Y 到平面 ABC 的距离是点 S 到该平面距离的 $\dfrac{3}{4}$. 因此，四面体 $AXCY$ 与四面体 $ABCS$ 的体积之比为 $\dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{4}$.

c）在棱 AB 上取点 Y''，使 $BY'' : Y''A = AY : YS = 3 : 1$. 由正三角形 ASC 与 BAC 的全等关系，得 $CY = CY''$. 显然，$\angle CXY''$ 为钝角，故 $CY'' > CX$. 因此 $CY > CX$，最长边不可能是 CX.



第 10 题

在边长为 10 的等边三角形内放置 101 个点，其中任意三点都不共线．则：

a）一定有两点之间的距离不大于 1；

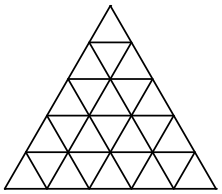
b）一定有三点是某个锐角三角形的三个顶点；

c）一定有三点是某个面积不大于 1 的三角形的三个顶点.

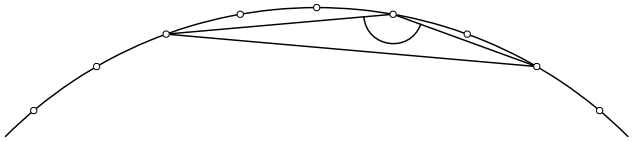
解析.

答案：a）真；b）假；c）真.

a）将原等边三角形分成 100 个边长为 1 的等边三角形．由抽屉原理，至少有两个给定点落在同一个小等边三角形内，它们之间的距离不大于 1.



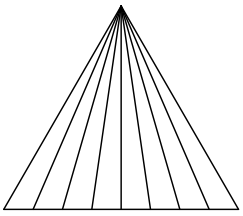
b）在原等边三角形内取一个圆，将 101 个点都放在该圆的一段四分之一圆弧上．这些点中的任意三个构成的三角形，均有一个角不小于 135°，所以都不是锐角三角形.



c）将原等边三角形分成 50 个等面积三角形，每个小三角形的面积均为

$$\frac{1}{50}\cdot\frac{10^2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}<1.$$

这样的划分可以如下实现：将其中一边分成 50 等份，把各分点与对面的顶点连接．由抽屉原理，至少有三个给定点落在同一个小三角形内，它们构成的三角形面积小于 1.



第 11 题

数 2026^n-1：

a）对每个整数 $n\geq 1$，都能被 45 整除；

b）对无穷多个整数 $n\geq 1$，能被 $n+1$ 整除；

c）对无穷多个整数 $n\geq 1$，能被 2027 整除.

解析.

答案：a）真；b）真；c）真.

a）由公式

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1}),$$

可知 2026^n-1 能被 $2026-1=2025=45^2$ 整除，因而也能被 45 整除.

b）取 $n=p-1$，其中 p 为不整除 2026 的素数. 由费马小定理，$2026^n-1=2026^{p-1}-1$ 能被 $p=n+1$ 整除. 由于这样的素数有无穷多个，结论成立.

c）与 a 问类似，当 n 为正偶数时，2026^n-1 能被 $2026^2-1=2025\cdot 2027$ 整除，因而能被 2027 整除.

第 12 题

对任意正整数，考虑如下过程：每一步都将当前的数替换成它的十进制各位数字之和，直到得到一位数时停止. 则：

a）从 14^{1000} 开始，最终得到 5；

b）从 $(10^9)!$ 开始，至多四步就会停止；

c）从由 1000 个 11 构成、幂运算自上而下计算的幂塔

$$\underbrace{11^{11^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{11}}}}}}_{1000\text{ 个 }11}$$

开始，最终得到 5.

解析.

答案：a）假；b）真；c）真.

记正整数 n 的各位数字之和为 $S(n)$. 注意到 $S(n)\equiv n\pmod 9$. 事实上，若 n 的十进制表示为 $a_ka_{k-1}\ldots a_1a_0$，则

$$\begin{aligned}n&=a_k10^k+a_{k-1}10^{k-1}+\cdots+a_1\cdot 10+a_0\\&\equiv a_k+a_{k-1}+\cdots+a_1+a_0=S(n)\pmod 9.\end{aligned}$$

a）由于 $5^6\equiv 125^2\equiv(-1)^2\equiv 1\pmod 9$，所以

$$14^{1000} \equiv 5^{1000} \equiv (5^6)^{166} \cdot 5^4 \equiv 5^4 \equiv 625 \equiv 4 \pmod 9.$$

故这一过程最终得到 4.

b）由 $(10^9)! < (10^9)^{10^9} = 10^{9\cdot 10^9}$ 可知，$(10^9)!$ 至多有 $9 \cdot 10^9$ 位数字，因此

$$S\big((10^9)!\big) \le 9 \cdot 9 \cdot 10^9 < 10^{11}.$$

故 $S\big((10^9)!\big)$ 至多有 11 位数字，从而 $S\big(S((10^9)!)\big) \le 9 \cdot 11 = 99$. 在不超过 99 的正整数中，99 的各位数字之和最大，因而 $S\big(S(S((10^9)!))\big) \le 18$. 不超过 18 的正整数，其各位数字之和均不超过 9，所以

$$S\big(S(S(S((10^9)!)))\big) \le 9.$$

因此至多四步，这一过程就会停止.

c）题中的幂塔可以写成 11^{11^n}，其中 n 是由其余 998 个 11 构成的幂塔，因而为奇数. 有

$$11^n \equiv (-1)^n \equiv -1 \equiv 5 \pmod 6.$$

于是可设 $11^n = 6k + 5$. 又有 $11^6 \equiv 2^6 \equiv 64 \equiv 1 \pmod 9$，故

$$11^{11^n} \equiv 11^{6k+5} \equiv (11^6)^k \cdot 11^5 \equiv 1^k \cdot 2^5 \equiv 32 \equiv 5 \pmod 9.$$

所以这一过程最终得到 5.

注. 在计算 5^6 和 11^6 模 9 的余数时，也可以使用欧拉定理：若 $\gcd(a, n) = 1$，则 $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod n$，其中 $\varphi(n)$ 为不超过 n 且与 n 互素的正整数的个数.