最近做的几道 AI 题

2026-10-30

1. 循环三次式的最大值

设整数 $n \geq 8$，非负实数 $a_1, \ldots, a_n$ 满足 $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$. 下标按模 n 循环，求

$$S = \sum_{i=1}^{n} a_i a_{i+1}(a_{i+2} + a_{i+3})$$

的最大值.

解 取 $(a_1, a_2, a_3, a_4) = \left(\frac{2}{9}, \frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{2}{9}\right)$，其余各项为 0，得 $S = \frac{4}{81}$.

不妨设 $a_n = \max_{1 \leq i \leq n} a_i$. 令 $G = \left(C_{n-1}^2 \cup \{14, 25, 36\}\right) \setminus \{34\}$，其中 C_{n-1}^2 连接圆周距离为 1 或 2 的顶点，$ij = \{i, j\}$. G 不含 K_4. 逐项比较并用 Motzkin–Straus 不等式，得

$$\begin{aligned} S &\leq a_n \sum_{ij \in E(G)} a_i a_j \\ &\leq \frac{a_n}{3} \left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i\right)^2 \\ &= \frac{1}{3} a_n (1 - a_n)^2 \leq \frac{4}{81} \end{aligned}$$

2. 正交条件下的最优常数

求最小常数 C，使得对任意整数 $n \geq 2$ 及满足 $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = 1$、$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 0$ 的实数 x_i, y_i，均有 $\left|\sum_{i=1}^{n} x_i^3 y_i\right| \leq C$.

解 令 $t = \sum_{i=1}^{n} x_i^4$，则 $x_i^2 \leq \sqrt{t} \leq 1$.

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^3 y_i\right)^2 &= \left[\sum_{i=1}^{n} (x_i^3 - t x_i) y_i\right]^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} (x_i^3 - t x_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^6 - t^2 \\ &\leq t^{3/2} - t^2 \leq \frac{27}{256} \end{aligned}$$

取正整数 m，令 $n = m + 1$，取 $x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$、$y_1 = \frac{1}{2}$，并对 $2 \leq i \leq n$ 取 $x_i = \frac{1}{2\sqrt{m}}$、$y_i = -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{m}}$. 则

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^3 y_i = \frac{\sqrt{3}}{16}\left(3 - \frac{1}{m}\right) \longrightarrow \frac{3\sqrt{3}}{16}$$

故 $C_{\min} = \frac{3\sqrt{3}}{16}$，有限 n 不取等.

3. 前后部分和的乘积

设整数 $n \geq 2$，非负实数 $a_1, \ldots, a_n$ 满足：对每个 $k = 1, \ldots, n$，均有

$$(a_1 + \cdots + a_k)(a_k + \cdots + a_n) \geq k(n + 1 - k)$$

求 $\sum_{i=1}^{n} a_i^2$ 的最小值，并确定所有取等情形.

解 若 $a_1 + \cdots + a_n < n$, 取最小的 k 使 $a_1 + \cdots + a_k < k$. 则 (空和记为 0) $a_1 + \cdots + a_{k-1} \geq k - 1$, 故 $a_k + \cdots + a_n < n + 1 - k$，从而

$$\frac{(a_1 + \cdots + a_k)(a_k + \cdots + a_n)}{k(n + 1 - k)} < 1$$

矛盾. 故

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \geq \frac{(a_1 + \cdots + a_n)^2}{n} \geq n$$

等号当且仅当 $a_1 = \cdots = a_n = 1$，且此时满足题设.

4. 奇环上的相邻差

设奇数 $n \geq 3$，$a_1, \ldots, a_n \in [0, 1]$ 满足 $\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{n-1}{2}$. 约定 $a_{n+1} = a_1$、$a_{n+2} = a_2$，求

$$F = \sum_{i=1}^{n} |a_i - a_{i+1}| \, |a_{i+1} - a_{i+2}|$$

的最大值，并确定所有取等数组.

解 取 $(a_1, \ldots, a_n) = (0, 1, 0, 1, \ldots, 0, 1, 0)$，得 $F = n - 2$.

记 $d_i = |a_i - a_{i+1}|$，$m = \min\limits_{1 \leq i \leq n} d_i$，$M = \max\limits_{1 \leq i \leq n} d_i$. 相邻两项 a_i, a_{i+1} 不能都小于 m，奇环上必有相邻两项均不小于 m，故 $\sum_{i=1}^{n} \min\{a_i, a_{i+1}\} \geq m$，且 $\sum_{i=1}^{n} |d_i - d_{i+1}| \geq 2(M - m)$. 于是

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} d_i &= n - 1 - 2\sum_{i=1}^{n} \min\{a_i, a_{i+1}\} \\ &\leq n - 1 - 2m \end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} \min\{d_i, d_{i+1}\} \\ &= \sum_{i=1}^{n} d_i - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} |d_i - d_{i+1}| \\ &\leq n - 1 - M - m \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} F &\leq M \sum_{i=1}^{n} \min\{d_i, d_{i+1}\} \\ &\leq M(n - 1 - M - m) \\ &\leq M(n - 1 - M) \leq n - 2 \end{aligned}$$

取等必有 $M = 1$、$m = 0$、$\sum_{i=1}^{n} \min\{a_i, a_{i+1}\} = 0$. 正项互不相邻，由总和及 $a_i \leq 1$，恰有 $\frac{n-1}{2}$ 个 1. 故所有取等数组恰为上述数组的循环轮换.