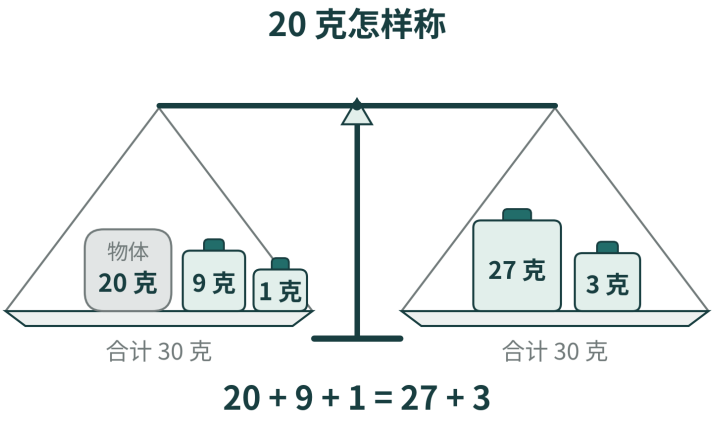
四块砝码的极限：平衡三进制

2026-10-31

给你四块不可拆分的砝码，可以自行决定每块的质量，天平两边都允许放．要求 1 克、2 克、3 克……都能用这些砝码一次配平，中间不能漏掉．最多能称到多少克？答案是 40 克，砝码取 1 克、3 克、9 克、27 克．例如，称 20 克时，物体与 9 克、1 克砝码同盘，另一盘放 27 克、3 克：

$$20 = 27 - 9 + 3 - 1$$



把 27 克换成 28 克，不就能称到 41 克了吗？确实能，但 14 克丢了．不用 28 克时，其余三块最多凑出 $1+3+9=13$ 克；用了 28 克，即使把其余砝码全部放到另一侧，正的质量差也至少是 $28-13=15$ 克．



想换一组重量，让 1 到 41 一个不漏，也做不到．每块砝码只有“同侧、对面、不用”三种放法，四块一共 $3^4=81$ 种．若能称出 1 到 41，交换砝码两侧的位置，还能得到 -1 到 -41 的质量差，加上 0，就需要 $41+41+1=83>81$ 种不同结果，已经超过全部放法．

计数给出了 40 的上界，但还没有证明它能达到．接下来要说明：1、3、9、27 确实能称出中间的每个整数．

数字也可以取负值

普通三进制使用 $0,1,2$ 三个数字，位权是 $1,3,9,27,\ldots$. 平衡三进制保留位权，把数字换成 $-1,0,1$. 记 $\bar{1}=-1$，上横线只属于这一位，则

$$(a_k\cdots a_1a_0)_3=\sum_{i=0}^{k}a_i3^i,\qquad a_i\in\{-1,0,1\}$$

例如，$(1\bar{1})_3=3-1=2$，$(10\bar{1})_3=9-1=8$，20 写成 $(1\bar{1}1\bar{1})_3$. 四个数字分别告诉我们：27 克放对面，9 克放同侧，3 克放对面，1 克放同侧. 数字 0 表示不用.

“平衡” 指三个数字关于 0 对称. 数字可以取负值，位权仍是 3 的幂.

从余数开始，就能写出每个整数

整数除以 3，通常取余数 0、1、2. 其中余 2 也可以改成余 -1，只要把商加 1：例如，$20=3\times6+2=3\times7-1$. 因此，$-1,0,1$ 恰好对应除以 3 的三种余数，任意整数 N 都能写成

$$N=3q+r,\qquad q\in\mathbb{Z},\quad r\in\{-1,0,1\}$$

当 $N\neq0$ 时，

$$|q|=\frac{|N-r|}{3}\le\frac{|N|+1}{3}<|N|$$

继续分解商，绝对值严格减小，有限步后必到达 0. 各次余数从低位到高位排好，便得到所求表示. 正数、负数都适用，0 直接写成 0.

算 20 时，过程是

$$20=3\times7-1,\quad 7=3\times2+1,$$
$$2=3\times1-1,\quad 1=3\times0+1$$

余数依次为 $-1,1,-1,1$，倒过来读就是 $(1\bar{1}1\bar{1})_3$.

同一个数会不会有另一种有限写法？假设有两种不同的表示，各位数字为 a_i 与 b_i. 补齐前导零，设从低位起首次不同的是第 j 位. 两式相减，再除以 3^j，更高位仍是 3 的倍数，故

$$a_j-b_j\equiv0\pmod3,\qquad a_j-b_j\in\{-2,-1,1,2\}$$

矛盾. 所以，忽略前导零，每个整数恰有一种有限平衡三进制表示.

这里也能看出为什么偏偏用 3. 仍讨论整数的有限表示，若保留 $-1,0,1$ 三个数字，只把位权改为 2 的幂，就有 $(1)_2=(1\bar{1})_2=1$，表示不再唯一. 若把位权改为 4 的幂，这些数字串表示的整数模 4 只能同余于 $-1,0,1$，因此不能表示 2. 底数为 3 时，三个数字恰好各占一个余数类，不多也不少.

四位恰好覆盖 -40 到 40

计入前导零，n 位共有 3^n 种不同表示，且

$$\left|\sum_{i=0}^{n-1} a_i 3^i\right| \le \sum_{i=0}^{n-1} 3^i = \frac{3^n-1}{2}$$

由唯一性，这些表示互不重复；区间内的整数个数又恰为 $2\times\dfrac{3^n-1}{2}+1=3^n$. 所以，$n$ 位恰好表示

$$\left[-\frac{3^n-1}{2},\ \frac{3^n-1}{2}\right]\cap\mathbb{Z}$$

其中没有缺口. 取 $n=4$，范围便是 -40 到 40.

一个数的正负由最高非零位决定：若这一位权重为 3^k，全部低位的绝对贡献至多为 $(3^k-1)/2<3^k$，不足以抵消最高位. 因此不必另设独立符号位.

1、3、9、27 为什么是最优方案

设有 n 块正整数质量的砝码 $w_1\le\cdots\le w_n$，每块至多使用一次，允许放在两盘. 物体放在固定的一侧，砝码放对面记为 1，放同侧记为 -1，不用记为 0. 可配平的质量满足

$$x=\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i w_i,\qquad \varepsilon_i\in\{-1,0,1\}$$

要求 1 到 M 的每个整数质量都能一次配平.

把四块推广到 n 块，同样需要 $2M+1$ 个不同的质量差，而放置状态只有 3^n 种，故

$$2M+1\le 3^n,\qquad M\le\frac{3^n-1}{2}$$

取 $w_i=3^{i-1}$ 时，前面的表示定理保证区间内每个整数都能称出，恰好达到上界. 因此

$$M_{\max}=\frac{3^n-1}{2},\qquad (w_1,\dots,w_n)=(1,3,\dots,3^{n-1})$$

到这里，上界与构造已经配合完整：计数排除了更好的方案，平衡三进制给出了达到上界的方案. 竞赛中的最值题常需要这两步，单独猜中一组重量还不够.

如果连续范围已经达到上界，砝码也只能取这组重量. 此时，全部 3^n 个状态必须与 $-M,\dots,M$ 一一对应. 任何重复或区间外的结果，都会挤掉一个需要称出的整数. 全取正号得到最大值，故砝码总质量为 $\sum_{i=1}^{n} w_i=M$.

把所有系数加 1，便有

$$\sum_{i=1}^{n}(\varepsilon_i+1)w_i=\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i w_i+M$$

于是，系数取 $0,1,2$ 的所有组合恰好一次覆盖 $0,1,\dots,3^n-1$. 这里的 2 只是平移后的系数，并不是允许一块砝码使用两次. 这些系数均非负，要得到 1，必须有 $w_1=1$.

前 k 块一旦确定为 $1,3,\dots,3^{k-1}$，系数取 $0,1,2$ 就恰好覆盖 $0,\dots,3^k-1$. 下一块的重量

$$\begin{cases} w_{k+1}<3^k & \text{会造成重复,}\\ w_{k+1}>3^k & \text{会漏掉 } 3^k \end{cases}$$

只能是 $w_{k+1}=3^k$. 如此逐块确定，得到的就是 1、3、9、27…….

反过来，如果要求称到指定的 M，就取使 $3^n\ge 2M+1$ 成立的最小整数 n. 用对数写成

$$n_{\min}=\lceil\log_3(2M+1)\rceil$$

状态数给出下界，取 3 的幂又能达到这个下界，因为此时 $(3^n-1)/2\ge M$.

不使用对数，也可以直接比较 3 的幂. 例如，要称出 1 到 100 克，连同 0 与负的质量差，共需 201 个结果，而

$$3^4=81<201<243=3^5$$

所以至少需要五块. 取 1、3、9、27、81 克，能够连续称到 121 克，足以覆盖所需范围. 例如，$100=81+27-9+1$.

“块数最少” 和 “达到这几块的最大量程” 要分清. 前者的方案未必唯一. 只要求称出 1、2、3，砝码 1、2 与砝码 2、3 都只需两块，后者用 $1=3-2$. 因此，“要称出 1，就必须有一块 1” 的说法并不成立. 证明最优方案唯一时，先把系数移成 $0,1,2$，就是为了排除这种通过相减凑出小重量的情形.

若砝码只能放在物体对面，每块只有 “用” 和 “不用” 两种状态. 全部子集至多产生 2^n 个结果，扣除空集对应的 0，有 $M+1\le 2^n$. 于是

$$M_{\max}=2^n-1,\qquad n_{\min}=\lceil\log_2(M+1)\rceil$$

取 $1,2,4,\dots,2^{n-1}$ 即可达到上界. 称到 40，两盘放置最少四块，单盘放置最少六块.

小数也能用负数字

在小数点右边继续使用 $3^{-1},3^{-2},\dots$ 作为位权，就得到平衡三进制小数. 例如

$$\frac{1}{3}=(0.1)_3,\qquad \frac{2}{3}=(1.\bar{1})_3=1-\frac{1}{3}$$

一个最简分数 p/q（$q>0$）能写成有限平衡三进制小数，当且仅当分母只含质因子 3，也允许分母为 1. 也就是 $q=3^m$，其中 m 为非负整数.

必要性很直接：若小数点后至多有 m 位，则 $3^m(p/q)$ 为整数，故 $q \mid 3^m$. 反过来，若 $q=3^m$，把整数 p 写成平衡三进制，再将小数点左移 m 位即可.

所以 1/2 没有有限表示，但它有两种很整齐的无限表示：

$$\frac{1}{2}=\sum_{j=1}^{\infty}3^{-j}=(0.111\ldots)_3$$

以及

$$\frac{1}{2}=1-\sum_{j=1}^{\infty}3^{-j}=(1.\bar{1}\bar{1}\bar{1}\ldots)_3$$

这与前面的唯一性并不矛盾：前面证明的是有限表示. 两个不同的有限数字串逐位相减，一定有最低非零位；无限向右延伸时，这一步未必还能做. 十进制中的 $1=0.999\ldots$ 也有类似现象.

负数字怎样参与计算

有了表示法，就可以按位计算. 二进制的一位叫 bit，三进制的一位叫 trit. 普通三进制使用 $0,1,2$，本文采用平衡三进制，每位取 $-1,0,1$.

取负和移位

取相反数只需逐位反号：

$$-\sum_{i=0}^{n-1}a_i3^i=\sum_{i=0}^{n-1}(-a_i)3^i$$

也就是交换 1 与 $\bar{1}$，0 不变. 减法因而可以交给加法器完成：$A-B=A+(-B)$.

左移一位、末尾补 0，对应乘以 3：

$$3(a_k\cdots a_0)_3=(a_k\cdots a_0\,0)_3$$

例如，$2=(1\bar{1})_3$，左移后得到 $6=(1\bar{1}0)_3$. 有限字长时，结果仍可能超出表示范围，不能因为不需要独立符号位就忽略溢出.

加法与负进位

加法仍然从最低位算起. 每一列接收两个数字 a_i,b_i 和低位传来的进位 c_i，输出本位数字 s_i 与新进位 c_{i+1}. 完成这一步的电路叫全加器，它要满足

$$a_i + b_i + c_i = s_i + 3c_{i+1}, \qquad s_i, c_{i+1} \in \{-1, 0, 1\}$$

令 $t = a_i + b_i + c_i$，则 $-3 \le t \le 3$. 本位数字与新进位可以统一写成

$$c_{i+1} = \left\lfloor \frac{t+1}{3} \right\rfloor, \qquad s_i = t - 3c_{i+1}$$

三个输入各有三种取值，总共只有 $3^3 = 27$ 种组合. 可以把对应的输出预先列成表，再用逻辑门实现，不必真的按公式先做除法 [1].

特别地，$2 = 3 - 1$，故本位写 $\bar{1}$、进 1；$-2 = -3 + 1$，故本位写 1、进 $\bar{1}$. 例如

$$(10\bar{1})_3 + (1\bar{1}\bar{1})_3 = (111)_3 = 13$$

从低位到高位，三列计算分别为

$$\begin{aligned} (-1) + (-1) + 0 &= 1 + 3(-1), \\ 0 + (-1) + (-1) &= 1 + 3(-1), \\ 1 + 1 + (-1) &= 1 + 3 \cdot 0 \end{aligned}$$

乘法则仍按分配律展开，下式各和遍历两个数的有限数位：

$$\left(\sum_i a_i 3^i\right)\left(\sum_j b_j 3^j\right) = \sum_{i,j} a_i b_j 3^{i+j}$$

由于 $a_i b_j \in \{-1, 0, 1\}$，每个部分积只需选择 “原数、零、相反数”，再移位相加. 同一位上的部分积累加后仍要处理进位，并不是完全不需要算术电路.

截去低位，恰好得到最近整数

通常删去低位只是截断，平衡三进制却能同时完成舍入. 把整数 N 的最低 k 位去掉（$k \ge 1$），剩余数字串表示 Q，则

$$N = 3^k Q + R, \qquad |R| \le \frac{3^k - 1}{2}$$

于是

$$\left| \frac{N}{3^k} - Q \right| \le \frac{1 - 3^{-k}}{2} < \frac{1}{2}$$

所以 Q 恰是 $N/3^k$ 的唯一最近整数. 例如

$$8 = (10\bar{1})_3 \;\longrightarrow\; (10)_3 = 3$$

去掉个位后得到 3，恰是 8/3 的唯一最近整数. 负数同样成立：-8 去掉个位，得到 -3. 这里舍入的是缩放后的数；若保留原位权，得到的就是最近的 3^k 的整数倍. 不等式严格小于 $1/2$，因此不会遇到两个整数同样近的情况.

三个数字怎样存进电路

数字 -1 未必用负电压表示. 例如，可约定低、中、高三个电压 $0, V/2, V$ 依次表示 $-1, 0, 1$，设置两个分界值来识别它们. 也可以用电流、磁性状态，或者用两个二进制位编码一个三值位. 后一种方式可以直接在二进制机器上实现 [2].

组成完整计算机时，寄存器暂存数值，存储器保存数据和指令，控制器安排取数、运算与写回. 三值加法器只是其中一环；各部分还要约定字长、指令编码、溢出处理以及与外部设备的通信方式.

三值位比二值位多一种状态，能多存多少信息？仍然可以计数：n 个三值位有 3^n 种状态，若用 b 个二进制位一一编码，必须有

$$2^b \geq 3^n, \qquad b \geq \lceil n \log_2 3 \rceil$$

因此，每个三值位的信息容量为 $\log_2 3 \approx 1.585$ bit. 这里比较的是可区分的状态数；实际编码时，若每个 trit 固定占用两个 bit，仍要用 $2n$ 位.

数位少了，实现每一位的电路却可能更复杂. 例如，总电压跨度同为 V，若采用等距电平，二值的间隔为 V，三值则只有 $V/2$. 中间状态要经得起噪声和器件差异，门电路也要能稳定连接起来. 电平间隔本身不等于实际噪声容限，但足以提醒我们：数位数量并不能直接换算成芯片面积或功耗.

1958 年，它已经被做成过计算机

1958 年 12 月，莫斯科大学完成了 Setun 样机. 它采用平衡三进制，用小型铁氧体磁芯和半导体二极管构成逻辑元件，具有存储器、指令系统和乘法运算能力.

开发者的回顾记载，Setun 共生产约 50 台，应用于大学、研究机构和工厂. 1970 年推出的 Setun-70 采用两个栈，分别保存运算数据和程序返回信息，并把 6 个 trit 组成一个 “tryte”[3]. 一组 6 位三值数字有 $3^6 = 729$ 种状态，折合约 $6 \log_2 3 \approx 9.51$ bit 的信息容量.

这些机器证明了三进制可以支撑完整计算系统.

今天为什么又有人研究三值计算

今天仍有人研究三值器件，也有人把三值数据用在现有计算机上.

2025 年，《Nature Communications》的一项研究通过调节晶体管的控制电压，展示了可在二值、三值之间切换的器件及反相器 [4]. 它解决的是如何产生、控制中间状态，尚不是一台完整计算机.

神经网络中需要反复计算加权和，其中的系数称为权重．BitNet b1.58 让部分线性层的量化权重取 $-1, 0, 1$．暂时略去量化缩放因子，计算就变成

$$\sum_{i=1}^{n} w_i x_i = \sum_{w_i=1} x_i - \sum_{w_i=-1} x_i, \qquad w_i \in \{-1, 0, 1\}$$

乘以权重变成加、减或跳过．2025 年的 BitNet b1.58 2B4T 报告采用三值量化权重，线性层输入采用 8 位整数，累加另需足够精度；报告也提供了 CPU、GPU 上的推理实现 [5]．因此，权重用了三个值，并不表示其他数据和底层电路也都改成了三进制．

截至 2026 年 10 月，官方 bitnet.cpp 项目已经提供二进制 CPU、GPU 上的相关推理实现，并扩展到嵌入模型等应用 [6]．三值结构在这里主要用于减少权重存储和计算开销．

三值数据已经能在二进制机器上发挥作用．从现有实现看，低比特模型和专用运算单元是较现实的近期方向；是否进一步走向通用三进制计算机，还要看整套硬件与软件能否配合．

参考资料

[1] Douglas W. Jones. Fast Ternary Addition.

[2] Douglas W. Jones. Binary Coded Ternary and Its Inverse.

[3] N. P. Brousentsov、S. P. Maslov、J. Ramil Alvarez、E. A. Zhogolev. Development of Ternary Computers at Moscow State University.

[4] Y. A. Kwon 等. Reconfigurable binary and ternary logic devices enabling logic state modulation. Nature Communications，2025，16：6740.

[5] Shuming Ma 等. BitNet b1.58 2B4T Technical Report. 2025.

[6] Microsoft. bitnet.cpp 官方项目. 查阅于 2026 年 10 月 31 日.