2026 年菲律宾 IMO 国家队选拔测试（TST1 / TST2）

题文来源：AoPS 社区整理版（原文链接）．本译稿不含解答.

TST1 · 第一天

第 1 题

对于整数数列 $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$，定义其**阳光代价（sunshine cost）**为当 i, j 各自遍取 $1, 2, \ldots, 100$ 时，

$$|(a_1 + a_2 + \cdots + a_i) - a_j|$$

的最大值．求所有由两两不同的整数构成的数列 $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ 的阳光代价的最小可能值.

第 2 题

Bluey 在一个 1000×1000 的方格表中放糖果．起初，每个方格都是空的．每一步，Bluey 选择糖果总数为 3 的倍数的一行或一列，再在这一行或这一列中选择一个空方格，在其中放入一颗糖果．如果不存在可按上述规则操作的行或列，Bluey 就停止.

求 Bluey 最多能放入多少颗糖果.

第 3 题

对于正整数 n, k，用 $f_k(n)$ 表示 n 除以 $2^k - 1$ 所得的余数．若正整数 n 满足

$$f_1(n) \le f_2(n) \le f_3(n) \le f_4(n) \le \cdots,$$

则称 n 为**佳数（grouse number）**.

(a) 证明：佳数有无穷多个.

(b) 证明：存在正整数 M，使得小于 M 的佳数至多有 $\dfrac{M}{2025^{2025}}$ 个.

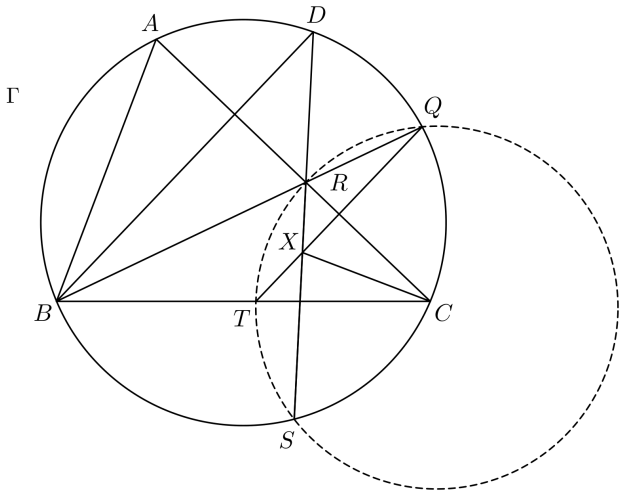
命题：美国（U.S.A）.

TST1 · 第二天

第 4 题

设 ABC 是一个满足 $AB < AC$ 的锐角三角形，Γ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆．过 B 作 AC 的垂线，与 Γ 再次相交于点 $D \neq B$．设 Q 是 Γ 上异于 B 且满足 $AB = AQ$ 的点．直线 BQ 与 AC 相交于点 R．直线 DR 与 Γ 再次相交于点 $S \neq D$．线段 BC 与 $\triangle QRS$ 的外接圆相交于点 T．直线 TQ 与 RS 相交于点 X．

证明：$CX \perp AB$.



命题：Dorlir Ahmeti、Dren Neziri，科索沃.

第 5 题

正整数三元组序列 $(a_0, b_0, c_0), (a_1, b_1, c_1), \ldots, (a_{2025}, b_{2025}, c_{2025})$ 对所有 $0 \leq i \leq 2024$ 满足

$$(a_{i+1}, b_{i+1}, c_{i+1}) = \big(a_i + \gcd(b_i, c_i),\ b_i + \gcd(c_i, a_i),\ c_i + \gcd(a_i, b_i)\big).$$

求 a_{2025} 的最小可能值．这里，$\gcd(x, y)$ 表示整数 x, y 的最大公约数.

第 6 题

Tim 和 Tam 玩一个游戏．游戏开始时，Tim 在黑板上写下一些非零实数，这些数不一定互不相同．每一轮按如下步骤进行.

首先，Tam 选择一个多项式

$$P_k(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

其系数 $a_k, a_{k-1}, \ldots, a_1, a_0$ 是当前黑板上的所有数按某种顺序排列而成的．例如，若黑板上的数为 $4, -3, 4$，则 $k = 2$，Tam 可以选择 $4x^2 - 3x + 4$ 或 $-3x^2 + 4x + 4$，但不能选择 $4x - 3$ 或 $-3x^2 - 3x + 4$.

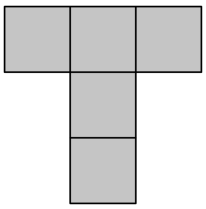
然后，若方程 $P_k(x) = 0$ 没有实数解，游戏就停止．否则，Tim 选择一个满足 $P_k(r) = 0$ 的实数 r，并将它写在黑板上，于是黑板上的数比原来多一个.

判断 Tim 能否保证，无论 Tam 如何行动，游戏都永不停止.

命题：Melvil Treilleux、Vincent Jugé，法国.

TST2 · 第一天

第 1 题



设 $m \geq n > 7$. Anna 将一个 $m \times n$ 方格表的 mn 个方格各涂成粉色或绿色，使得其中存在一个全部为粉色的 3×3 子方格表和一个全部为绿色的 3×3 子方格表. **T 形五格骨牌（T-pentomino）**是由五个方格组成的字母 T 形图形，如下图所示，允许旋转. 若一个 T 形五格骨牌中恰有 2 个粉色方格或恰有 2 个绿色方格，则称它是**好的**. 对于 Anna 的哪些染色方式，她的朋友 Ben 能找到一个好的五格骨牌?

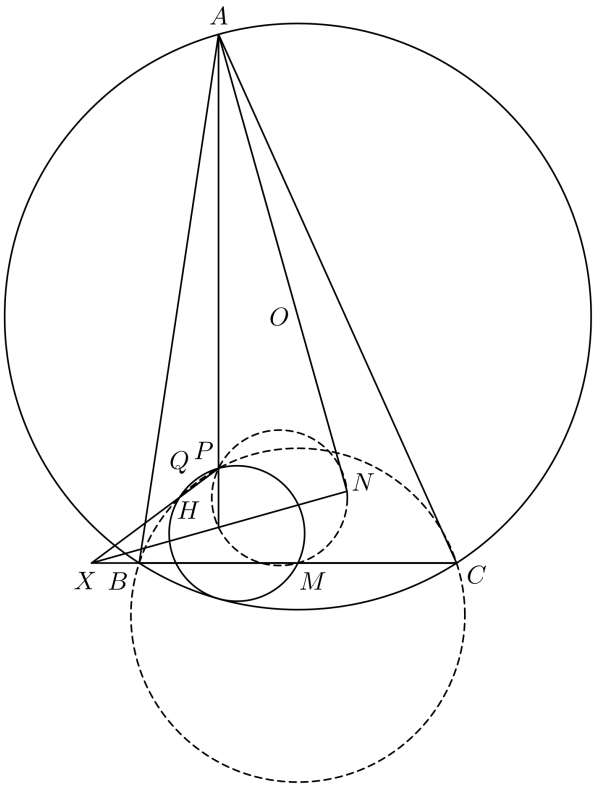
命题：Luke Sebastian Sy.

第 2 题

设 ABC 是一个锐角不等边三角形，其垂心为 H，外心为 O. 设 M 是 BC 的中点. 过 H 且垂直于 AO 的直线分别与 BC、AO 相交于点 X, N. 直线 AH 与 $\triangle HMN$ 的外接圆再次相交于点 $P \neq H$，直线 XP 与 $\triangle BPC$ 的外接圆再次相交于点 $Q \neq P$.

证明：$\triangle PQM$ 的外接圆与 $\triangle ABC$ 的外接圆相切.

命题：Mark Justin Villafuerte、Ervin Joshua Bautista.



第 3 题

设 $c \geq 2$ 为实数. 对于每个整数 $n \geq 4$，设 $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ 是 $1, 2, \ldots, n$ 的一个排列，并令 $a_{n+1} = a_1$. 定义

$$F_c(a_1, \ldots, a_n) = \sum_{i=1}^{n} |a_i - ca_{i+1}|.$$

求具有如下性质的最大常数 $f(c)$：对于每个整数 $n \geq 4$，都存在 $1, 2, \ldots, n$ 的一个排列 $(a_1, \ldots, a_n)$，使得 $F_c(a_1, \ldots, a_n) \geq f(c)n^2$.

命题：Farrell Eldrian Wu，灵感来自 IWYMIC 2021 A4.

TST2 · 第二天

第 4 题

设 $n > 2027$ 为正整数，且 $4n+1$ 为素数. Mika 在黑板上写下各数 $2n+1, 2n+3, 2n+5, \ldots, 4n+1$. 每次操作时，她从黑板上的数中按顺序选出两个互素的数 a, b，然后在黑板上写下满足 $b \mid (ac-1)$ 的最小正整数 c. 之后，她重复这一过程，如此无限进行下去.

求 Mika 进行有限次操作后，黑板上可能出现的不同数的个数的最大值.

命题：Mark Justin Villafuerte.

第 5 题

设 K 为正整数，$L \in [0, 2]$ 为实数. 三个数列 $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ 对 $n \geq 0$ 由以下循环关系递归定义：

$$Kx_{n+1} = x_n^2 + Ly_nz_n, \qquad Ky_{n+1} = y_n^2 + Lz_nx_n, \qquad Kz_{n+1} = z_n^2 + Lx_ny_n.$$

证明：具有以下性质的最小整数是 $K = 4052$：存在一个整数初始三元组 (x_0, y_0, z_0)，满足 $|x_0| \geq 2026, |y_0| \geq 2026, |z_0| \geq 2026$，并且对于所有 $L \in [0, 2]$，数列 $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ 都有界.

命题：Farrell Eldrian Wu.

第 6 题

设 k 为正整数，$n \geq 2$ 为整数. 起初，一只兔子被放在一个 $n \times n$ 棋盘的某个方格中. 随后，一名猎人分若干轮追捕兔子. 每一轮，猎人选定 k 个不同的方格. 兔子知道猎人选定了哪些方格；它向右移动一格或向上移动一格，但移动到的方格必须没有被猎人在该轮选中. 如果兔子无法移动，它就被捕获，追捕结束.

棋盘的边界循环相接：如果兔子位于最右边的一列，那么向右移动一格就会到达同一行最左边一列的方格；如果兔子位于最上面的一行，那么向上移动一格就会到达同一列最下面一行的方格.

(a) 求 k 的最小值，使得猎人有一种策略，能保证在有限轮内捕获兔子.

(b) 对于这个 k 值，求最小整数 M，使得猎人能保证在至多 M 轮内捕获兔子.

命题：Shawn Darren Chua、Farrell Eldrian Wu.

译注：原文两问的 K 统一作 k，将 topmost column 按上下文校正为 “最上行”. 原件未说明猎人是否知道兔子的位置，此信息条件待核；译文未作补充.