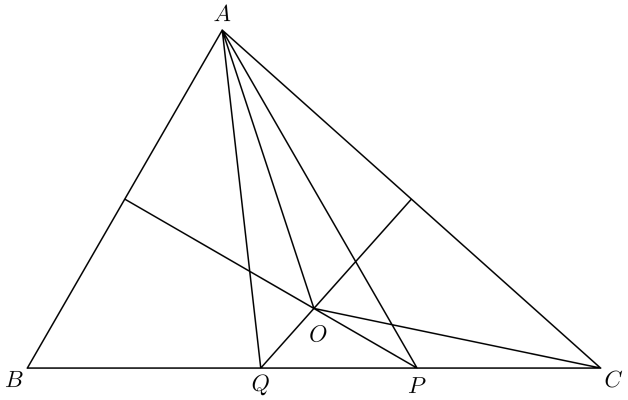
2026 年泛美女子数学奥林匹克竞赛（PAGMO 2026）

2026-10-24　原文链接

第一天

第 1 题

设 ABC 是一个三边长两两不同的锐角三角形．线段 AB 和 AC 的垂直平分线分别交线段 BC 于点 P 和点 Q，并相交于点 O．若 $\angle BAQ = 2\angle PAC$，求 $\angle AOC$ 的大小.



第 2 题

将一个 2025×2025 棋盘中的一些方格涂黑，使得以下条件成立：

1. 在任意一个 3×1 或 1×3 的方格块中，若其中至少有两个方格为黑色，则第三个方格也为黑色.
2. 棋盘中至少有一个方格未涂色.

黑色方格的数量最多是多少?

第 3 题

若正整数 N 可以表示为

$$N = \frac{(a+b)^{n+k}}{a^n \cdot b^k},$$

其中 a, b, n, k 均为正整数，则称 N 为一个 **búcaro 数**．求出所有 búcaro 数.

第二天

第 4 题

设 $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ 是一个实数数列，满足 $0 < a_1 \leq 1 \leq a_2 \leq 3$，且对所有 $n \geq 1$，都有 $a_{n+2} = a_n + \frac{1}{a_{n+1}}$.

例如，当 $n = 1$ 时，$a_3 = a_1 + \dfrac{1}{a_2}$；当 $n = 2$ 时，$a_4 = a_2 + \dfrac{1}{a_3}$；依此类推.

证明：对所有 $n \geq 1$，都有 $a_n \leq \frac{3n}{2}$.

第 5 题

求出所有整数 $n \geq 2$，使得下列各数都整除 $n + 1$：

$$\begin{aligned}
&\gcd(n,1) + \gcd(n,2),\\
&\gcd(n,2) + \gcd(n,3),\\
&\gcd(n,3) + \gcd(n,4),\\
&\qquad\vdots\\
&\gcd(n,n-1) + \gcd(n,n).
\end{aligned}$$

这里，$\gcd(a,b)$ 表示 a 与 b 的最大公约数.

第 6 题

设 ABC 是一个满足 $AB < AC$ 的锐角三角形，其外接圆为 Γ. 设 D 为从 A 向 BC 所作高的垂足. 以 AD 为直径的圆与 AB 交于异于 A 的点 X，并与 Γ 交于异于 A 的点 Y. 设 O_1、O_2、O_3 分别为三角形 ABC、ADX、BXC 的外心. 证明：三角形 XBY 与三角形 $O_1O_2O_3$ 相似.

