2026 年 USEMO 东区试题

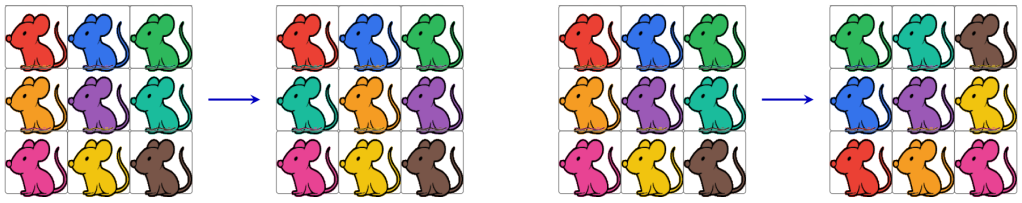
第一天（2026 年 10 月 24 日）

第 1 题

设 n 为不是完全立方数的正整数，a,b,c 为非零整数，且 $a+b+c=0$. 证明：$n(a^3-n)(b^3-n)(c^3-n)$ 不是整数的立方.

第 2 题

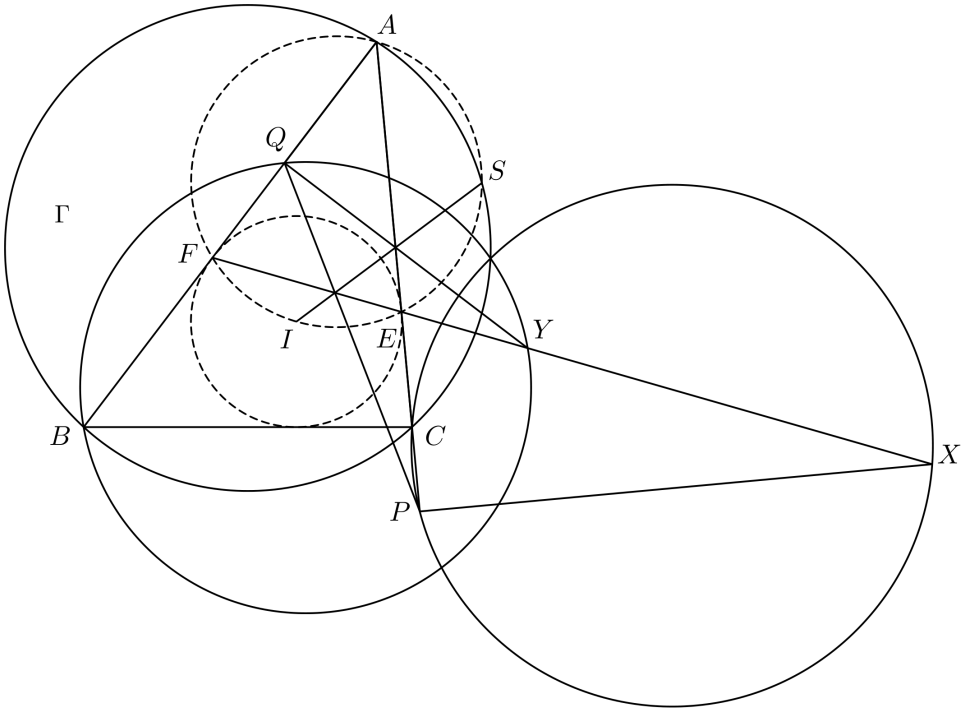
一个 2026×2026 方格表中，每个方格的颜色都不相同. 每次操作可以选择一行或一列，将这一行或这一列的颜色循环平移任意多个位置. 至少需要多少次操作，才能将整个着色图案逆时针旋转 $90°$?



左图示意中间一行的循环平移，右图示意逆时针旋转 $90°$.

第 3 题

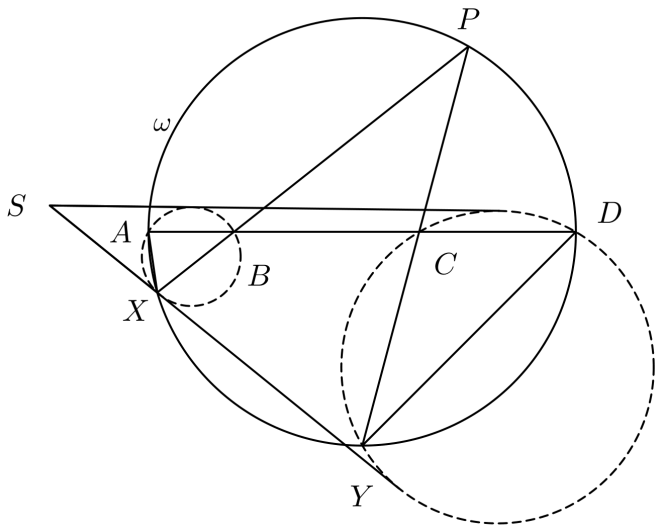
设三角形 ABC 的内心为 I，外接圆为 Γ. 其内切圆分别与边 AC,AB 相切于点 E,F. 设圆 Γ 与三角形 AEF 的外接圆除 A 外的另一交点为 S. 直线 SI 关于直线 EF 的对称直线分别与直线 AC,AB 交于点 P,Q. 点 X,Y 在直线 EF 上，且 $PX\perp AC$、$QY\perp AB$. 证明：以 CX、BY 为直径的两圆在直线 PQ 上有一个公共点，在圆 Γ 上也有一个公共点.



第二天（2026 年 10 月 25 日）

第 4 题

设 B, C 为圆 ω 内部的两个定点. 直线 BC 与圆 ω 交于 A, D，且 A, B, C, D 依此顺序共线. 点 P 在圆 ω 上，且不同于 A, D. 直线 PB, PC 分别与圆 ω 再交于 X, Y. 设三角形 ABX 与 CDY 的外接圆的两条公外切线交于点 S. 证明：当 P 变化时，S 总在两条定直线之一上.



第 5 题

以 $\mathbb{R}_{>0}$ 表示正实数集，$\mathbb{R}$ 表示实数集. 求所有严格递增函数 $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$，使得对任意 $x, z > 0$，方程 $f(x^2 - xy + y^2) + f(y^2 - yz + z^2) = f(x^2 + xz + z^2)$ 恰有一个实数解 $y \in \mathbb{R}$.

第 6 题

将每个正整数恰染成天蓝色或米色中的一种，且每种颜色都出现无穷多次. 将天蓝色和米色的正整数分别按从小到大的顺序记为 $a_1 < a_2 < \cdots$ 和 $b_1 < b_2 < \cdots$. 构造实数 $\alpha = 0.a_{b_1}a_{b_2}a_{b_3}\cdots$ 和 $\beta = 0.b_{a_1}b_{a_2}b_{a_3}\cdots$，其中每个小数均由相应整数的通常十进制表示依次拼接而成. α 与 β 能否同时为有理数?

题文来源：东区第一天原卷、东区第二天原卷. Mathelots 主办，Anant Mudgal 负责.